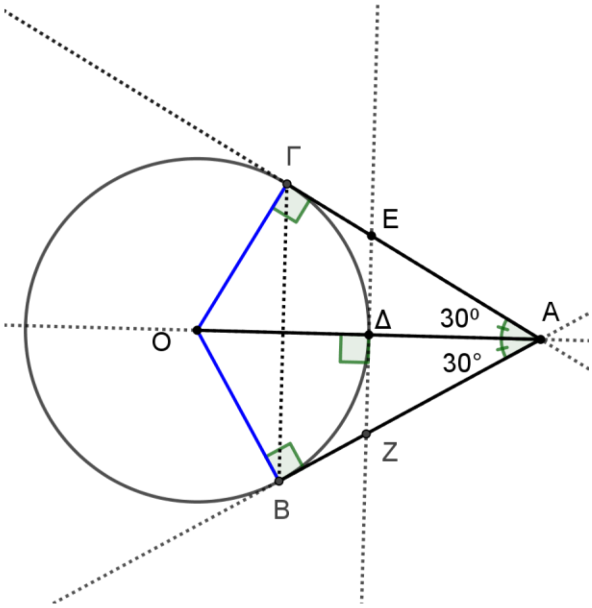
ΛΥΣΗ



α) Φέρνουμε τις ακτίνες ΟΒ, ΟΓ στα σημεία επαφής Β, Γ αντίστοιχα, οι οποίες θα είναι κάθετες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες, δηλαδή ΟΒ $\perp$ ΑΒ και ΟΓ$\perp$ ΑΓ , οπότε $O\hat{B}A = O\hat{\Gamma}A = 90^o$.

Η διακεντρική ευθεία ΑΟ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων, δηλαδή

$O\hat{A}B = \frac{B\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι $O\hat{A}B = 30^o$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας των 30^o, η πλευρά ΟΒ, θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΟΑ, δηλαδή $OB = \frac{OA}{2}$ ή ΟΑ = 2ΟΒ ή ΟΑ = 2ρ.

β) Η ΖΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Δ, άρα θα είναι κάθετη στη ακτίνα ΟΔ που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής Δ, άρα είναι και κάθετη στην ΟΑ.

Στο τρίγωνο ΑΖΕ το ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Είναι $B\hat{A}\Gamma = 60^o$ από τα δεδομένα, άρα το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.

γ) Τα τμήματα ΖΒ και ΖΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου που άγονται από το Ζ, οπότε ΖΒ = ΖΔ (1).

Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΖΕ το ύψος του ΑΔ είναι και διάμεσος οπότε:

$Z\Delta = \frac{EZ}{2}$ ή $ZB = \frac{AZ}{2}$, αφού ΖΒ = ΖΔ από σχέση (1) και ΕΖ = ΑΖ επειδή το ΑΖΕ είναι ισόπλευρο (από β) ερώτημα , άρα ή ΑΖ = 2ΖΒ.

δ) Η διακεντρική ευθεία ΑΟ είναι μεσοκάθετη της χορδής που έχει άκρα τα σημεία επαφής, δηλαδή ΑΟ$\perp$ ΒΓ. Επίσης είναι και ΑΟ $\perp$ ΖΕ, αφού η διακεντρική ΑΟ είναι φορέας του ύψος ΑΔ στην πλευρά ΖΕ του ισοπλεύρου τριγώνου (από β) ερώτημα). Άρα ΕΖ // ΒΓ ως κάθετες στην ίδια ευθεία, και τα τμήματα ΒΖ και ΓΕ τέμνονται στο Α, άρα δεν είναι παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι τραπέζιο. Τα τμήματα ΕΓ και ΕΔ είναι εφαπτόμενα του κύκλου που άγονται από το Ε, οπότε ΕΓ = ΕΔ και επειδή ΖΔ = ΕΔ από σχέση (1) , προκύπτει ότι ΖΒ = ΕΓ, οπότε το τραπέζιο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές.