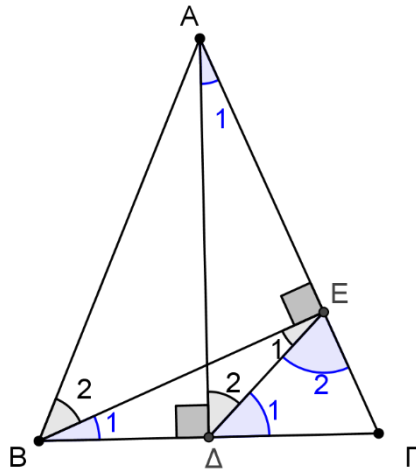


ΛΥΣΗ

Από δεδομένα έχουμε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με AB = AG και το AD ύψος στη βάση του BΓ, άρα το AD είναι διάμεσος στη βάση BΔ, δηλαδή Δ το μέσο της BΓ, και διχοτόμος της

γωνίας της κορυφής A, οπότε θα ισχύει $\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ (1).



α) Από δεδομένα έχουμε ότι το BE είναι ύψος στην πλευρά AG, οπότε το τρίγωνο BEΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{B}\hat{E}\hat{\Gamma} = 90^\circ$ (2) και η ED είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα BΓ, οπότε $ED = \frac{B\Gamma}{2}$ ή $B\Gamma = 2ED$.

β) Έχουμε ότι Δ μέσο της και ότι $ED = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα $ED = \Delta\Gamma = \Delta B$, οπότε τα τρίγωνα EDΓ και EDB είναι ισοσκελή και θα ισχύουν $\hat{E}_2 = \hat{\Gamma}$ (3) και $\hat{E}_1 = \hat{B}_1$ (4), ως γωνίες προσκείμενες στις βάσεις ΔΓ και BE των τριγώνων αντίστοιχα.

Από δεδομένα έχουμε ότι το AD είναι ύψος στην πλευρά BΓ, οπότε το τρίγωνο ADΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 90^\circ$ και για τις οξείες γωνίες του θα ισχύει ότι:

$$\hat{A}_1 + \hat{\Gamma} = 90^\circ \text{ ή } \hat{A}_1 = 90^\circ - \hat{\Gamma} \text{ (5)}$$

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο BEΓ για τις οξείες γωνίες του θα ισχύει ότι:

$$\hat{B}_1 + \hat{\Gamma} = 90^\circ \text{ ή } \hat{B}_1 = 90^\circ - \hat{\Gamma} \text{ και λόγω της σχέσης (4) έχουμε ότι } \hat{E}_1 = 90^\circ - \hat{\Gamma} \text{ (6)}$$

Από τις σχέσεις (5), (6) και (1) προκύπτει ότι: $\hat{E}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$.

γ) Είναι $\hat{B}_2 = \hat{B} - \hat{B}_1 = \hat{\Gamma} - \hat{E}_1 = \hat{\Gamma} - (90^\circ - \hat{\Gamma}) = 2\hat{\Gamma} - 90^\circ$ (7), επειδή είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως γωνίες προσκείμενες στη βάση BΓ του ισοσκελούς ABΓ και $\hat{B}_1 = \hat{E}_1 = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ από σχέσεις (4) και (6).

Ισχύει ότι $\widehat{\Delta}_2 = 90^\circ - \widehat{\Delta}_1 = 90^\circ - 2\widehat{E}_1 = 90^\circ - 2(90^\circ - \widehat{\Gamma}) = 2\widehat{\Gamma} - 90^\circ$ (8), επειδή το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{A\Delta\Gamma} = 90^\circ$, $\widehat{\Delta}_1 = 2\widehat{E}_1$ ως εξωτερική γωνία του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΔ και $\widehat{E}_1 = 90^\circ - \widehat{\Gamma}$ από σχέση (6).

Από σχέσεις (7) και (8) προκύπτει ότι $\widehat{B}_2 = \widehat{\Delta}_2$.