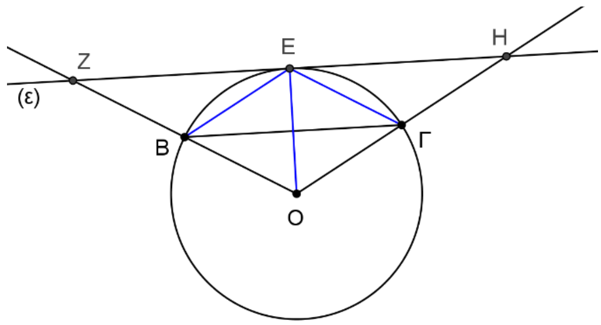
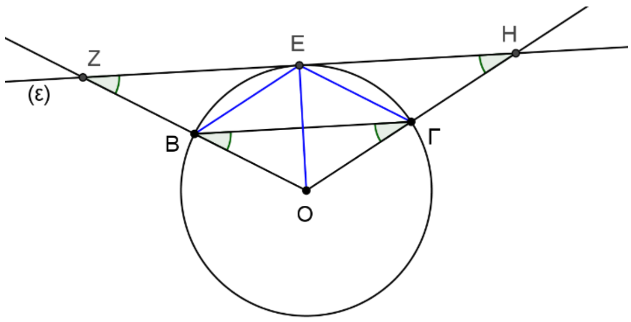
ΛΥΣΗ

α)

i. Η ακτίνα ΟΕ στο σημείο επαφής Ε είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε) του κύκλου. Το Ε είναι μέσο του τόξου ΒΓ, οπότε τα τόξα ΒΕ και ΕΓ είναι ίσα, άρα και οι αντίστοιχες χορδές τους ΕΒ και ΕΓ θα είναι ίσες. Επίσης είναι ΟΒ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου. Επομένως η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Ο και Ε θα είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. Οπότε η ΟΕ θα είναι κάθετη στην ΒΓ και επίσης είναι κάθετη στην ευθεία (ε). Επομένως ΒΓ // (ε) ως κάθετες ευθείες στην ίδια ευθεία ΟΕ.



ii. Επειδή είναι ΟΒ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου, το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΒΓ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $O\hat{B}\Gamma = O\hat{\Gamma}B$ (1). Επίσης είναι $O\hat{B}\Gamma = O\hat{Z}H$ (2) και $O\hat{\Gamma}B = O\hat{H}Z$ (3) ως εντός εκτός και επι τα αυτά γωνίες των παραλλήλων ΒΓ και (ε) με τέμνουσες την ΟΖ και ΟΗ αντίστοιχα. Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $O\hat{Z}H = O\hat{H}Z$ (4), οπότε το τρίγωνο ΟΖΗ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΖΗ.



β)-Η ΟΕ είναι κάθετη στην (ε), οπότε το τρίγωνο ΟΕΖ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΟΖ και η ΒΕ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα, άρα ΒΕ $=\frac{OZ}{2}$ = ΟΒ =ρ, όμως ΟΕ = ΟΒ =ρ. Οπότε ΟΕ = ΟΒ $=\frac{OZ}{2}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΖ η κάθετη πλευρά του ΟΕ είναι το μισό της υποτείνουσάς του ΟΖ, άρα η απέναντι της κάθετης πλευράς γωνία θα είναι 30^0 , δηλαδή $O\hat{Z}H = 30^0$. Όμως $O\hat{Z}H = O\hat{H}Z$ (από σχέση (4)), οπότε $O\hat{H}Z = 30^0$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΟΖΗ ισχύει ότι $\mathrm{O}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H} + \mathrm{O}\hat{\mathrm{H}}\mathrm{Z} + \mathrm{Z}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{H} = 180^0$ ή $30^0 + 30^0 + \mathrm{Z}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{H} = 180^0$ ή $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{H} = 120^0$.