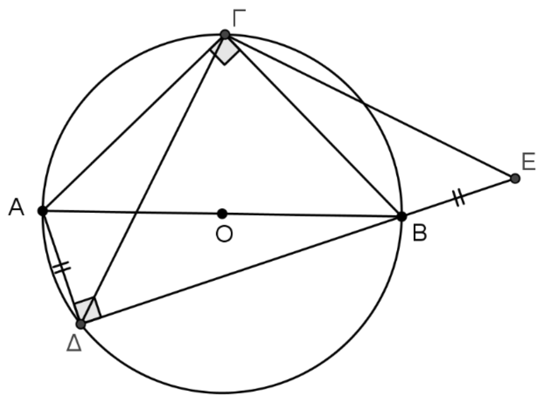
ΛΥΣΗ

α)



i) Για τις γωνίες του τετραπλεύρου ΓΑΔΒ ισχύει ότι:

$Γ\widehat{Α}Δ + Α\widehat{Δ}Β + Δ\widehat{Β}Γ + Α\widehat{Γ}Β = 360^0$ και αφού $Α\widehat{Γ}Β = Α\widehat{Δ}Β = 90^0$ τότε $Γ\widehat{Α}Δ + Δ\widehat{Β}Γ = 180^0$,

οπότε $Γ\widehat{Α}Δ = 180^0 - Δ\widehat{Β}Γ$ (1) .

Η $Γ\widehat{Β}Ε$ είναι παραπληρωματική γωνία της $Δ\widehat{Β}Γ$, οπότε $Γ\widehat{Β}Ε = 180^0 - Δ\widehat{Β}Γ$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $Γ\widehat{Α}Δ = Γ\widehat{Β}Ε$.

i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

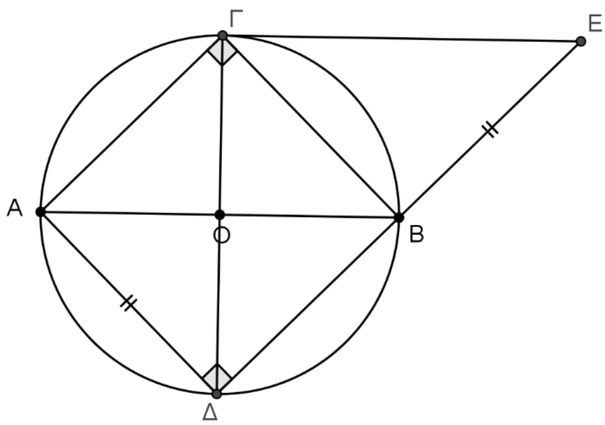
- ΑΔ = ΒΕ, από υπόθεση
- ΑΓ = ΓΒ ως ίσες χορδές των ίσων τόξων ΑΓ και ΓΒ αφού το Γ είναι μέσο του τόξου ΑΒ.
- $Γ\widehat{Α}Δ = Γ\widehat{Β}Ε$ από α) ερώτημα

Άρα τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π).

ii) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα, προκύπτει ότι $Α\widehat{Γ}Δ = Β\widehat{Γ}Ε$ γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΕ αντίστοιχα.

Τότε: $Δ\widehat{Γ}Ε = Δ\widehat{Γ}Β + Β\widehat{Γ}Ε = Δ\widehat{Γ}Β + Α\widehat{Γ}Δ = Α\widehat{Γ}Β = 90^o$, άρα $ΓΔ \perp ΓΕ$.

β)



Όταν το Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ, τότε από το **α)iii.** ερώτημα είδαμε ότι ΓΔ⊥ΓΕ ή ΟΓ⊥ΓΕ αφού ΓΔ διάμετρος και ΟΓ ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή για την ακτίνα ΟΓ ισχύει ότι είναι κάθετη στο τμήμα ΓΕ, οπότε η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου.