



α) i. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα και τα μισά τους είναι ίσα, δηλαδή $ΑΓ = ΒΔ \Leftrightarrow \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΒΔ}{2} \Leftrightarrow ΟΑ = ΟΔ$.

Άρα το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισοσκελές με $\widehat{ΔΑΟ} = \widehat{ΑΔΟ}$. Όμως $\widehat{ΑÔΔ} = 60^\circ$, από υπόθεση και συνεπώς, από το άθροισμα των γωνιών του, το ισοσκελές τρίγωνο έχει $\widehat{ΔΑΟ} + \widehat{ΑΔΟ} + 60^\circ = 180^\circ$ με $\widehat{ΔΑΟ} = \widehat{ΑΔΟ}$. Άρα $\widehat{ΔΑΟ} = \widehat{ΑΔΟ} = \widehat{ΑÔΔ} = 60^\circ$. Οπότε το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισόπλευρο, εφόσον έχει τρεις γωνίες ίσες. Το ΔΜ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, οπότε είναι και διάμεσος, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΟΑ.

ii. Είναι $ΑΜ = \frac{ΟΑ}{2} = \frac{\frac{ΑΓ}{2}}{2} = \frac{ΑΓ}{4}$.

β) Ομοίως με το ΟΑΔ, το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο οπότε το ΓΝ είναι ύψος και διάμεσός του.

Στο τρίγωνο ΟΑΒ το ΜΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών, άρα $ΜΝ \parallel ΑΒ$. Όμως $ΑΒ \parallel ΓΔ$ ως πλευρές ορθογωνίου, άρα $ΜΝ \parallel ΓΔ$.

Επίσης, $ΜΝ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΓΔ}{2} < ΓΔ$. Δηλαδή το ΜΝ είναι μικρότερο του ΓΔ, επομένως το ΜΝΓΔ δεν είναι παραλληλόγραμμο, καθώς αν ήταν οι απέναντι πλευρές του, ΜΝ και ΓΔ θα ήταν ίσες. Επομένως οι ΜΔ και ΓΝ δεν είναι παράλληλες.

Άρα το ΜΝΓΔ είναι τραπέζιο.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΜΔ και ΟΝΓ:

- Είναι ορθογώνια.
- $\widehat{ΜÔΔ} = \widehat{ΝÔΓ} = 60^\circ$, ως κατακορυφήν γωνίες και
- $ΟΔ = ΟΓ$, ως μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου.

Άρα τα τρίγωνα ΟΜΔ και ΟΝΓ είναι ίσα οπότε ισχύει και $ΔΜ = ΓΝ$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{ΜÔΔ}$ και $\widehat{ΝÔΓ}$. Επομένως το τραπέζιο ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές.