

α) Τα τρίγωνα ΑΔΤ και ΒΓΕ έχουν:

- $\widehat{B\Gamma} = \widehat{A\Delta T}$, ως μισά των απέναντι γωνιών \widehat{B} και $\widehat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ
- $AD = BG$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ
- $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα ΑΔΤ και ΒΓΕ είναι ίσα, οπότε έχουν $DT = BE$ (1) αφού οι πλευρές αυτές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες \widehat{A} και $\widehat{\Gamma}$.

Επιπλέον, από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι $AT = EG$ (2).

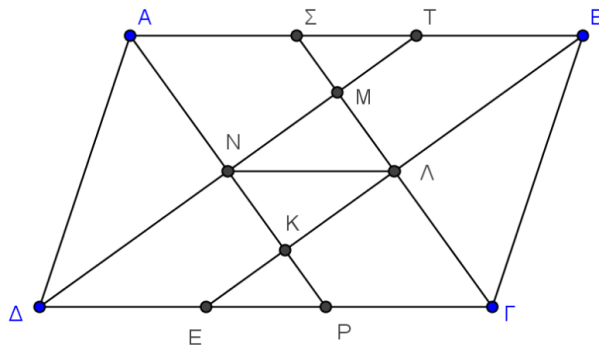
Επειδή $AB = \Gamma\Delta$ (ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο) ισχύει:

$$AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow AT + TB = DE + EG$$

η οποία λόγω της (2) γράφεται

$$TB = DE \text{ (3).}$$

Από τις (1), (3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.



β) Όμοια δείχνουμε ότι το ΑΣΓΡ είναι παραλληλόγραμμο οπότε $AR // \Sigma\Gamma$ και $NK // ML$. Επειδή το ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο, είναι $MN // KL$, οπότε και το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $\widehat{N\Delta E} = \widehat{\Sigma T M}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΓ που τέμνονται από την ΔΤ και

$$\widehat{N\Delta E} = \widehat{A\Delta N}, \text{ διότι η } \Delta T \text{ είναι διχοτόμος της γωνίας } \widehat{\Delta}.$$

Άρα είναι $\widehat{\Sigma T M} = \widehat{A\Delta N}$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΤ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΤ.

Η ΑΝ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΔΤ, οπότε είναι ύψος και διάμεσός του, δηλαδή $\widehat{N} = 90^\circ$. Τελικά, επειδή το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει μία γωνία ορθή, είναι ορθογώνιο.

γ) Το τρίγωνο ΑΔΤ είναι ισοσκελές (το αποδείξαμε στο β ερώτημα) οπότε $AD = AT$ (4).

Άρα η ΑΝ είναι και διάμεσος, οπότε το Ν είναι στο μέσο του ΔΤ. Όμοια προκύπτει ότι

στο τρίγωνο ΓΒΕ το Λ είναι στο μέσο του ΒΕ. Από το παραλληλόγραμμο ΔΕΒΤ βρίσκουμε:

$$\Delta T // = BE \Leftrightarrow \frac{\Delta T}{2} // = \frac{BE}{2} \Leftrightarrow \Delta N // = EL$$

Άρα το ΔΝΛΕ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς είναι ΛΝ // ΔΕ οπότε και ΝΛ // ΑΒ.

δ) Είναι $\Lambda N = BT = AB - AT$ και λόγω της (4) γίνεται

$$\Lambda N = AB - A\Delta$$