

α) Η AM διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε θα είναι και ύψος και διχοτόμος του τριγώνου.

Επειδή $AM \perp BG$ και $GD \perp BG$ προκύπτει ότι $AM \parallel GD$.

β) Ισχύει ότι $AB = \Gamma\Delta$ και $AB = A\Gamma$ οπότε $A\Gamma = \Gamma\Delta$. Άρα το τρίγωνο AΓΔ είναι ισοσκελές με βάση την AΔ, οπότε $\widehat{\Gamma\Delta\Delta} = \widehat{\Delta}$.

Ισχύει επίσης ότι $M\widehat{A\Delta} = \widehat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AM, ΓΔ που τέμνονται από την AΔ. Άρα $M\widehat{A\Delta} = \Gamma\widehat{A\Delta}$, επομένως η AΔ είναι διχοτόμος της γωνίας MΑΓ.

γ) Ισχύει ότι: $\Gamma\widehat{A\Delta} = \frac{M\widehat{A\Gamma}}{2} = \frac{\frac{B\widehat{A\Gamma}}{2}}{2} = \frac{B\widehat{A\Gamma}}{4}$ (1)

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABΓ βρίσκουμε:

$$B\widehat{A\Gamma} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow B\widehat{A\Gamma} + 2\widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow B\widehat{A\Gamma} = 180^\circ - 2\widehat{B}$$

Τότε η (1) γράφεται:

$$\Gamma\widehat{A\Delta} = \frac{180^\circ - 2\widehat{B}}{4} = 45^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$$

δ) Από τη τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο AΓΔ, έχουμε:

$$A\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Delta < AB + AB \Leftrightarrow A\Delta < 2AB$$

