

α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου

ΑΒΓ, οπότε ισχύει ότι: $ΔΕ // ΒΓ$ άρα και $ΔΕ // ΗΖ$.

Το ΕΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ισχύει ότι:

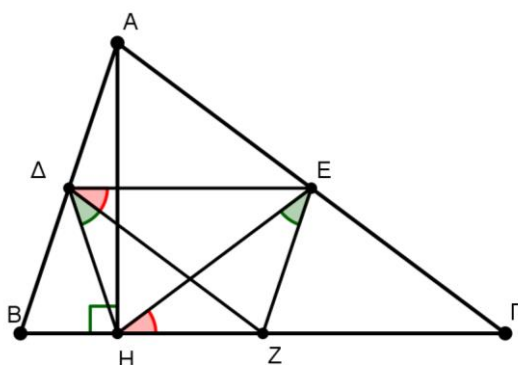
$$ΕΖ // ΑΒ \text{ και } ΕΖ = \frac{ΑΒ}{2} \text{ (1).}$$

Αφού $ΕΖ // ΑΒ$ και η ΔΗ τέμνει την ΑΒ, θα τέμνει και την παράλληλή της ΕΖ. Οπότε οι το τετράπλευρο ΔΕΗΖ έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες, άρα είναι τραπέζιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΒ η ΗΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα,

$$\text{άρα } ΗΔ = \frac{ΑΒ}{2} \text{ (2)}$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $ΕΖ = ΗΔ$ (3). Επομένως το τραπέζιο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές.



β) Τα τρίγωνα ΗΔΖ και ΗΕΖ έχουν:

- $ΕΖ = ΗΔ$, λόγω της (3)
- ΗΖ κοινή πλευρά
- $\widehat{ΗΖ} = \widehat{ΕΖΗ}$, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τραπέζιου

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π, τα τρίγωνα ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσα, άρα και $\widehat{ΗΔΖ} = \widehat{ΗΕΖ}$.

γ) Είναι $\widehat{ΕΔΖ} = \widehat{ΔΖΗ}$ (4) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΔΖ.

Επίσης, $\widehat{ΔΖΗ} = \widehat{ΕΖΗ}$ (5) από την ισότητα των τριγώνων ΔΗΖ και ΕΗΖ.

Από (4), (5) προκύπτει ότι $\widehat{ΕΔΖ} = \widehat{ΕΖΗ}$.