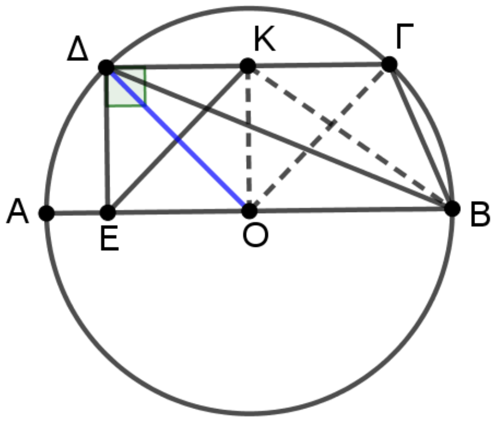

α) Επειδή ΔΕ $\perp$ ΓΔ και ΓΔ // ΑΒ είναι και ΔΕ $\perp$ ΑΒ.

Το ΟΓΔ είναι ισοσκελές, καθώς οι ΟΔ και ΟΓ είναι ακτίνες του κύκλου. Το Κ είναι μέσο της χορδής ΔΓ. Συνεπώς η ΟΚ είναι διάμεσος της βάσης ΓΔ επομένως είναι και ύψος του τριγώνου, δηλαδή είναι ΟΚ $\perp$ ΓΔ.

Τελικά, το τετράπλευρο ΔΕΟΚ έχει τρείς γωνίες ορθές, άρα είναι ορθογώνιο. Επομένως ΔΚ = ΟΕ.

Όμως, από υπόθεση, ΔΚ = ΚΓ, άρα ΟΕ = ΚΓ.

Επιπλέον ΟΕ // ΚΓ, οπότε το ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΕΚ και ΔΟΚ:

- Είναι ορθογώνια, με $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{K}$, $\Delta\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{O}$ ορθές.
- Έχουν ΔΚ κοινή πλευρά και
- ΔΕ = ΟΚ, ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΔΕΟΚ.

Άρα τα τρίγωνα ΔΕΚ και ΔΟΚ είναι ίσα, ως ορθογώνια με δύο κάθετες πλευρές ίσες, μία προς μία και άρα έχουν $\Delta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{K} = \Delta\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{K}$ (1), ως απέναντι γωνίες της κοινής πλευράς τους, ΔΚ.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΓΔ η ΟΚ είναι διχοτόμος της $\Delta\widehat{\mathrm{O}}\Gamma$ (εφόσον είναι και διάμεσος της ΓΔ).

Άρα $\Delta\widehat{\mathrm{O}}\Gamma = 2\Delta\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{K}$. Από (1) έχουμε $\Delta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{K} = \Delta\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{K}$, επομένως:

$\Delta\widehat{\mathrm{O}}\Gamma = 2\Delta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{K} \Leftrightarrow \Delta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{K} = \frac{\Delta\widehat{\mathrm{O}}\Gamma}{2}$.

γ) Είναι ΚΕ = ΟΔ, ως διαγώνιοι του ορθογωνίου ΔΕΟΚ και ΟΔ = ΟΒ, ως ακτίνες του κύκλου. Άρα ΚΕ = ΟΒ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΚ, η ΚΒ είναι υποτείνουσά του, άρα ισχύει ΟΒ < ΚΒ , άρα ΚΕ < ΚΒ.