

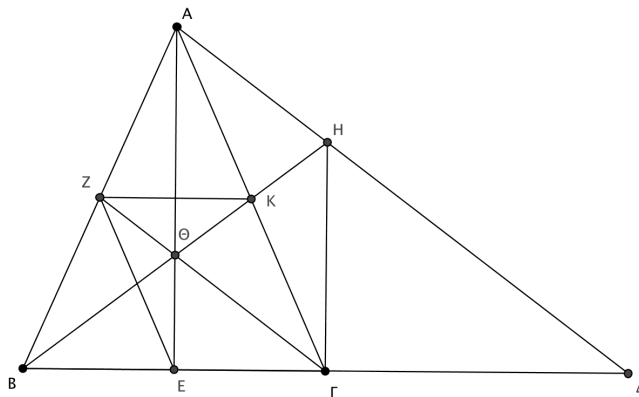
α) Το ΖΕ ενώνει μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα

$$ΖΕ // ΑΓ \text{ άρα } ΖΕ // ΚΓ \text{ και } ΖΕ = \frac{ΑΓ}{2}.$$

Επειδή ΑΕ, ΓΖ διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ, το Θ είναι το βαρύκεντρό του,

$$\text{οπότε και η ΒΚ είναι διάμεσος. Άρα } ΚΓ = \frac{ΑΓ}{2}$$

Οπότε το τετράπλευρο ΖΚΓΕ έχει τις απέναντι πλευρές του ΖΕ και ΚΓ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΖΓ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΒΔ, άρα
 $ΖΓ // ΑΔ$ άρα και $ΘΓ // ΑΗ$ (1)

Στο τρίγωνο ΒΗΔ το Γ είναι μέσο του ΒΔ και $ΘΓ // ΗΔ$, άρα το Θ είναι μέσο του ΒΗ.

Οπότε στο τρίγωνο ΒΗΓ το ΘΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΒΗ και ΒΓ,
άρα $ΘΕ // ΗΓ$ άρα και $ΑΘ // ΗΓ$ (2)

Από τις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο ΑΘΓΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.

Άρα $ΑΗ = ΘΓ$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

γ) Στο τρίγωνο ΒΑΗ το ΖΘ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΒΗ, άρα

$$ΖΘ = \frac{ΑΗ}{2} \Leftrightarrow ΑΗ = 2 ΖΘ.$$