



α) Το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $GA = GB$, δηλαδή το Γ ισαπέχει από τα A και B, οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του AB.

Επίσης το τρίγωνο AΔB είναι ισοσκελές, οπότε $DA = DB$, δηλαδή το Δ ισαπέχει από τα A και B, οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του AB.

Επειδή τα σημεία Γ, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του AB, η ΓΔ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος αυτού.

β) Επειδή η ΓΔ είναι μεσοκάθετος του AB, θα είναι και διχοτόμος των γωνιών \hat{A} και \hat{B} , δηλαδή $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Theta} = \hat{\Theta}\hat{\Delta}\hat{B} = 60^\circ$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AΘΔ η ΘZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $\Theta Z = \frac{A\Delta}{2} = ZA$

Επομένως το τρίγωνο ZΘΔ είναι ισοσκελές και αφού $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Theta} = 60^\circ$, το τρίγωνο ZΘΔ είναι ισόπλευρο. Τότε: $\hat{Z}\hat{\Theta}\hat{\Delta} = 60^\circ$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου AΘΓ, έχουμε:

$$\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Lambda}\hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Theta} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Theta} = 30^\circ$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AΘΓ η ΘH είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

υποτείνουσα, άρα $\Theta H = \frac{A\Gamma}{2} = H\Gamma$

Επομένως το τρίγωνο ΘHΓ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι:

$$\hat{H}\hat{\Theta}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Theta} \Leftrightarrow \hat{H}\hat{\Theta}\hat{\Gamma} = 30^\circ$$

Τότε:

$$\hat{Z}\hat{\Theta}\hat{\Delta} + \hat{Z}\hat{\Theta}\hat{H} + \hat{H}\hat{\Theta}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{Z}\hat{\Theta}\hat{H} + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Z}\hat{\Theta}\hat{H} = 90^\circ$$

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου AΘΔ βρίσκουμε:

$$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Theta} + \hat{\Delta}\hat{\Lambda}\hat{\Theta} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{\Delta}\hat{\Lambda}\hat{\Theta} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}\hat{\Lambda}\hat{\Theta} = 30^\circ$$

Τότε για την απέναντι πλευρά στο ορθογώνιο τρίγωνο AZK ισχύει ότι:

$$ZK = \frac{AZ}{2} = \frac{\frac{A\Delta}{2}}{2} = \frac{A\Delta}{4}$$