

**α) i.** Το σημείο M ανήκει στις μεσοκαθέτους  $\mu_1, \mu_2$  των AB, AG αντίστοιχα, οπότε ισαπέχει από τα σημεία A, B, Γ, δηλαδή είναι  $MA = MB$  (1) και  $MA = MG$  (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι  $MB = MG$ , άρα το M είναι μέσο της BΓ και ισχύει

$$AM = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Στο τρίγωνο ABΓ η διάμεσος του AM ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με  $\hat{A} = 90^\circ$ .

**ii.** Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ έχει τρεις γωνίες ορθές, την γωνία  $\widehat{Κ\hat{A}Λ}$  από το i.) ερώτημα και τις γωνίες  $\widehat{Α\hat{L}Μ}$  και  $\widehat{Α\hat{K}Μ}$  λόγω των μεσοκαθέτων  $\mu_2$  και  $\mu_1$  των πλευρών AG και AB αντίστοιχα. Οπότε το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο.

**iii.** Επειδή το ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοί του AM και ΚΛ είναι ίσες και διχοτομούνται και Θ είναι το κέντρο του.

$$\text{Οπότε είναι } \Lambda\Theta = \frac{ΚΛ}{2} = \frac{AM}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4} \text{ αφού είναι } ΚΛ = AM \text{ και } AM = \frac{B\Gamma}{2}.$$

**β)** Στο τρίγωνο ABM, τα Κ, Θ είναι μέσα των πλευρών του AB, AM αντίστοιχα.

Οπότε είναι  $ΚΘ \parallel ΒΜ$  άρα είναι  $ΚΘ \parallel ΒΙ$  (3)

Επίσης είναι  $ΚΘ = \frac{ΒΜ}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$  αφού M μέσο του BΓ και επειδή το σημείο I είναι

το μέσο του BM θα είναι  $ΒΙ = \frac{ΒΜ}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$ . Άρα θα είναι  $ΚΘ = ΒΙ$  (4).

Οπότε, το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΚΘ και ΒΙ, ίσες και παράλληλες (σχέσεις (3) και (4)).