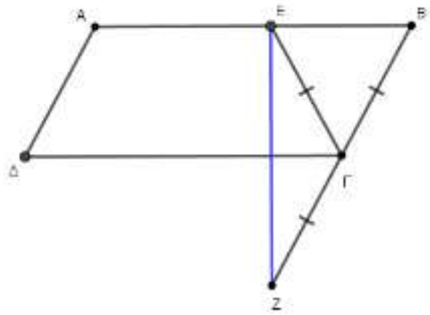
Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΒΓ, $\widehat{B}$ <90° και σημεία Ζ και Ε στην προέκταση της ΒΓ προς το Γ και στη πλευρά ΑΒ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΒΓ = ΓΖ = ΕΓ.

α) Φέρνουμε το τμήμα ΕΖ και σχηματίζεται το τρίγωνο ΒΕΖ.



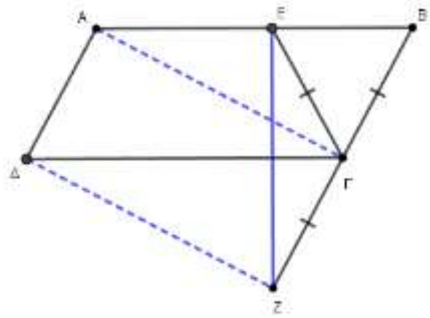
Στο τρίγωνο ΒΕΖ αφού είναι ΒΓ = ΓΖ (υπόθεση) τότε το Γ είναι μέσο του ΒΖ και ισχύει ΕΓ = ΓΖ =ΓΒ, δηλαδή ΕΓ = $\frac{BZ}{2}$. Οπότε η ΕΓ είναι διάμεσος στην πλευρά ΒΖ και είναι ίση με το μισό της πλευράς αυτής. Επομένως, το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΒΖ, άρα είναι $B\widehat{E}Z$ = 90°.

β) Έχουμε ότι ΒΓ // ΑΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Η ΕΓ τέμνει την ΒΓ, άρα η ΕΓ θα τέμνει και την παράλληλή της ΑΔ. Επίσης είναι ΑΒ // ΔΓ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, άρα και ΑΕ // ΔΓ.

Άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι τραπέζιο γιατί έχει μόνο δυο πλευρές παράλληλες, τις ΑΕ και ΔΓ.

Επειδή είναι ΕΓ = ΒΓ από υπόθεση και ΒΓ = ΑΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, θα είναι ΑΔ = ΕΓ. Άρα το τραπέζιο ΑΕΓΔ είναι ισοσκελές.

γ)



Λόγω του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχουμε ότι ΑΔ // = ΒΓ και επειδή το Ζ είναι στην προέκταση της ΒΓ τέτοιο ώστε ΓΖ = ΒΓ θα είναι ΑΔ // = ΓΖ. Άρα, το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.