



**α)** Επειδή το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι  $\widehat{M\hat{B}\Gamma} = 60^\circ$ .

Επίσης οι γωνίες  $\widehat{A\hat{B}M}$  και  $\widehat{M\hat{B}\Gamma}$  είναι συμπληρωματικές.

$$\widehat{A\hat{B}M} + \widehat{M\hat{B}\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{B}M} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{B}M} = 30^\circ.$$

Ισχύει ακόμη ότι  $BM = MG = BG$ , ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΜΒΓ. Επίσης  $BA = BG$  ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Άρα  $BA = BM$  οπότε το τρίγωνο ΒΑΜ είναι ισοσκελές και ισχύει  $\widehat{B\hat{A}M} = \widehat{B\hat{M}A}$ . Τότε από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΜ βρίσκουμε:

$$\widehat{A\hat{B}M} + \widehat{B\hat{A}M} + \widehat{B\hat{M}A} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 2\widehat{B\hat{A}M} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\hat{A}M} = 75^\circ.$$

Όμως οι γωνίες  $\widehat{\Delta\hat{A}E}$  και  $\widehat{B\hat{A}M}$  είναι συμπληρωματικές.

$$\widehat{\Delta\hat{A}E} = 90^\circ - \widehat{B\hat{A}M} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

**β)** Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ έχουν:

- ΔΕ κοινή πλευρά
- $\Delta A = \Delta \Gamma$ , ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- $\widehat{A\hat{\Delta}E} = \widehat{E\hat{\Delta}\Gamma}$  διότι η διαγώνιος του τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π, τα τρίγωνα είναι ίσα.

**γ)** Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων ισχύει ότι  $\widehat{\Delta\hat{A}E} = \widehat{\Delta\hat{\Gamma}E} \Leftrightarrow \widehat{\Delta\hat{\Gamma}E} = 15^\circ$  (1), καθώς οι γωνίες  $\widehat{\Delta\hat{A}E}$  και  $\widehat{\Delta\hat{\Gamma}E}$  βρίσκονται απέναντι από την κοινή πλευρά ΔΕ, των ίσων τριγώνων.

Επειδή το ΒΓΜ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι  $\widehat{B\hat{\Gamma}M} = 60^\circ$ .

$$\text{Επίσης } \widehat{\Delta\hat{\Gamma}B} = \widehat{\Delta\hat{\Gamma}E} + \widehat{E\hat{\Gamma}M} + \widehat{B\hat{\Gamma}M} = 15^\circ + \widehat{E\hat{\Gamma}M} + 60^\circ.$$

$$\text{Όμως } \widehat{\Delta\hat{\Gamma}B} = 90^\circ, \text{ άρα } 15^\circ + \widehat{E\hat{\Gamma}M} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{E\hat{\Gamma}M} = 15^\circ \text{ (2).}$$

Από (1) και (2) βρίσκουμε  $\widehat{\Delta\hat{\Gamma}E} = \widehat{E\hat{\Gamma}M}$ , άρα η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{\Delta\hat{\Gamma}M}$ .