



α) Στο τρίγωνο AZΔ η ΑΕ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα $\widehat{AZE} = \widehat{A\Delta E}$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ βρίσκουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{AZE} + \widehat{A\Delta E} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} + 2\widehat{A\Delta E} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\Delta E} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$$

Τότε:

$$\widehat{Z\Delta\Gamma} + \widehat{A\Delta E} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{Z\Delta\Gamma} = 180^\circ - \widehat{A\Delta E} \Leftrightarrow \widehat{Z\Delta\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} \Leftrightarrow \widehat{Z\Delta\Gamma} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$$

β) Η ΑΕ είναι μεσοκάθετος του ΖΔ και το σημείο Κ ανήκει σε αυτήν. Άρα το Κ ισαπέχει από τα Ζ και Δ, οπότε $ZK = K\Delta$.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΗΔΓ βρίσκουμε:

$$\widehat{ZH\Gamma} + \widehat{Z\Delta\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ZH\Gamma} + 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ZH\Gamma} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} - \widehat{\Gamma}$$

Όμως στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = 90^\circ$$

Οπότε έχουμε:

$$\widehat{ZH\Gamma} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2} - \frac{\widehat{A}}{2} - \widehat{\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{ZH\Gamma} = \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}$$