



α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου ABΓ έχουμε:

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογώνιου τριγώνου

$$AB\Gamma, \text{ \acute{a}\rho\alpha } AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma$$

\acute{A}\rho\alpha \text{ το τρίγωνο } AMB \text{ είναι ισοσκελές και επειδή } \hat{B} = 60^\circ, \text{ το τρίγωνο } AMB \text{ είναι ισόπλευρο.}

β) Το AD είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο AMB, \acute{a}\rho\alpha \text{ είναι και διάμεσος, οπότε}

$$\text{ισχύει ότι: } M\Delta = \frac{MB}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$$

Είναι $\hat{\Gamma M E} = \hat{A M B} = 60^\circ$ ως κατακορυφήν, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο MΓΕ είναι

$$M\hat{\Gamma E} = 30^\circ, \text{ \acute{a}\rho\alpha \text{ για την απέναντι πλευρά } ME \text{ έχουμε } ME = \frac{M\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}}$$

γ) Η $\hat{A M B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔME, οπότε $\hat{A M B} = \hat{M E \Delta} + \hat{M \Delta E}$. Από το ερώτημα (β) το τρίγωνο ΔME είναι ισοσκελές \acute{a}\rho\alpha $\hat{A M B} = 2\hat{M \Delta E} \Leftrightarrow$

$$\hat{M \Delta E} = \frac{\hat{A M B}}{2} = 30^\circ$$

Οι ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{M \Delta E}$ είναι εντός εναλλάξ των ΑΓ, ΔΕ που τέμνονται από τη ΓΔ \acute{a}\rho\alpha \text{ } AG \parallel DE.

Το τρίγωνο AMΓ είναι ισοσκελές ($AM = \Gamma M$) οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma A M} = 30^\circ$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο MΓΕ έχουμε:

$$\hat{E \Gamma M} + \hat{\Gamma M E} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{E \Gamma M} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{E \Gamma M} = 30^\circ$$

Στο ισόπλευρο τρίγωνο AMB η ΑΔ διχοτόμος οπότε $M\hat{A \Delta} = 30^\circ$

Έχουμε $\widehat{E\Gamma A} + \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ < 180^\circ$ δηλ. οι ΓΕ και ΑΔ τέμνονται.

Το τετράπλευρο ΑΔΕΓ έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες (ΕΔ= ΑΓ) οπότε είναι τραπέζιο.

Έχουμε $\widehat{E\Gamma A} = \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$ οπότε το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.