

α) Είναι  $\widehat{B\hat{A}M} = \widehat{\Delta\hat{M}A}$  (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων  $AB, \Gamma\Delta$  που τέμνονται από την  $AM$ .

Επειδή το  $M$  είναι μέσο του  $\Delta\Gamma$  ισχύει ότι  $\Delta M = \frac{\Gamma\Delta}{2}$  και  $\Gamma\Delta = AB$  (απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ ) άρα  $\Delta M = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma$ . Όμως  $B\Gamma = A\Delta$  (απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ ) άρα  $\Delta M = A\Delta$  και συνεπώς το τρίγωνο  $\Delta AM$  είναι ισοσκελές οπότε  $\widehat{\Delta\hat{A}M} = \widehat{\Delta\hat{M}A}$  (2).

Από τις (1), (2) είναι  $\widehat{B\hat{A}M} = \widehat{\Delta\hat{A}M}$ , οπότε η  $AM$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{\Delta\hat{A}B}$ .

β) Τα τρίγωνα  $\Delta EM$  και  $M\eta\Gamma$  έχουν:

$\Delta M = M\Gamma$  από υπόθεση

$\widehat{\Delta\hat{M}E} = \widehat{H\hat{M}\Gamma}$ , ως κατακορυφήν

$\widehat{E\hat{\Delta}M} = \hat{\Gamma}$ , ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων  $AE, B\Gamma$  που τέμνονται από την  $\Delta\Gamma$ .

Σύμφωνα με το κριτήριο  $\Gamma - \Pi - \Gamma$  τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και  $ME = M\eta$  διότι είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες  $\widehat{E\Delta M}$  και  $\hat{\Gamma}$ .

Επειδή  $\Delta M = M\Gamma$  και  $ME = M\eta$ , τα τμήματα  $E\eta, \Delta\Gamma$  διχοτομούνται.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $A\eta H$ , η  $AM$  είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα  $AM = \frac{E\eta}{2} = ME$ . Άρα το τρίγωνο  $AME$  είναι ισοσκελές και ισχύει ότι:  $\hat{E} = \widehat{E\hat{A}M}$ . Όμως έχει αποδειχθεί ότι  $\widehat{E\hat{A}M} = \widehat{\Delta\hat{M}A}$  άρα  $\hat{E} = \widehat{\Delta\hat{M}A}$ .