

α) Επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο ισχύει ότι: ΑΒ // ΓΔ και ΑΒ = ΓΔ . Άρα ΜΒ // ΝΓ και $\frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΓΔ}{2}$ και επειδή Μ και Ν μέσα των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα προκύπτει

ΜΒ = ΝΓ. Οπότε το ΜΒΓΝ έχει τις δύο απέναντι πλευρές ΜΒ και ΝΓ ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης $ΜΒ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{2ΒΓ}{2} = ΒΓ$.

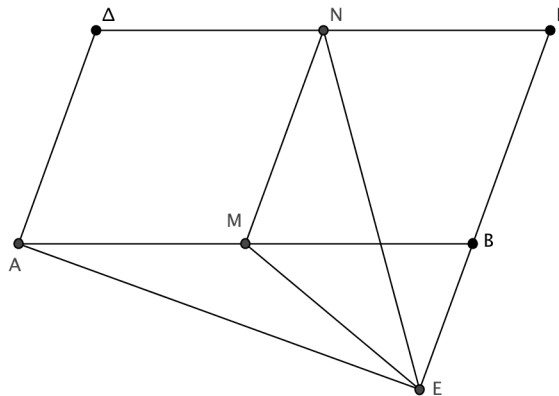
Επομένως το παραλληλόγραμμο ΜΒΓΝ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες και συνεπώς είναι ρόμβος.

β) Ισχύει ότι ΜΝ // ΒΓ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΜΒΓΝ άρα ΜΝ // ΕΓ .

Η ευθεία ΜΕ τέμνει την ευθεία ΓΝ επειδή αν ΜΕ // ΓΝ τότε από το Μ θα διέρχονταν δύο παράλληλες προς την ΓΝ (ΜΕ // ΓΝ και ΜΒ // ΓΝ). Άτοπο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ η ΕΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $ΕΜ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΓΔ}{2} = ΓΝ$.

Οπότε το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



γ) Έχουμε: $ΕΜ = \frac{ΑΒ}{2} = ΜΒ$ και $ΜΒ = ΜΝ$ αφού ΜΒΓΝ ρόμβος.

Άρα $ΕΜ = ΜΝ$ οπότε το τρίγωνο ΜΕΝ είναι ισοσκελές και ισχύει $\widehat{ΜΕΝ} = \widehat{ΜΝΕ}$ (3).

Επίσης $\widehat{ΝΕΓ} = \widehat{ΜΝΕ}$ (4) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΜΝ, ΒΓ που τέμνονται από την ΝΕ.

Άρα, από (3), (4) προκύπτει: $\widehat{ΜΕΝ} = \widehat{ΝΕΓ}$.

Οπότε η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΜΕΓ}$.