

α) Επειδή  $AZ = AD$ , το τρίγωνο  $AZD$  είναι ισοσκελές και έχει  $\widehat{AZD} = \widehat{ZAD}$  (1)

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου  $AZD$  έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{AZD} + \widehat{ZAD} = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \phi + 2\widehat{AZD} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{AZD} = 180^\circ - \phi \Leftrightarrow \widehat{AZD} = 90^\circ - \frac{\phi}{2}.$$

β) Οι γωνίες  $\widehat{A}$  και  $\widehat{B}$  είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων  $AD, BE$  που τέμνονται από την  $AB$ , άρα είναι παραπληρωματικές. Τότε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 180^\circ - \phi \quad (2).$$

Επειδή  $BZ = BE$ , το τρίγωνο  $BZE$  είναι ισοσκελές και έχει  $\widehat{EZB} = \widehat{BEZ}$  (3).

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου  $BZE$  και τις σχέσεις (2), (3) έχουμε:

$$\widehat{B} + \widehat{EZB} + \widehat{BEZ} = 180^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - \phi + 2\widehat{EZB} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{EZB} = \frac{\phi}{2}.$$

γ) Ισχύει ότι:  $\widehat{AZD} + \widehat{EZB} = 90^\circ - \frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{2} = 90^\circ$ . Οπότε και  $\widehat{DZE} = 90^\circ$ .

Η  $ZO$  είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου

$\triangle DZE$ , άρα  $ZO = \frac{DE}{2} = DO = OE$ .

Τα σημεία  $O, A$  ισαπέχουν από τα  $D, Z$  άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του  $DZ$ . Τα σημεία  $O, B$  ισαπέχουν από τα  $Z, E$ , οπότε ανήκουν στη μεσοκάθετο του  $ZE$ . Άρα οι  $OA$  και  $OB$  είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων  $DZ$  και  $ZE$  αντίστοιχα.