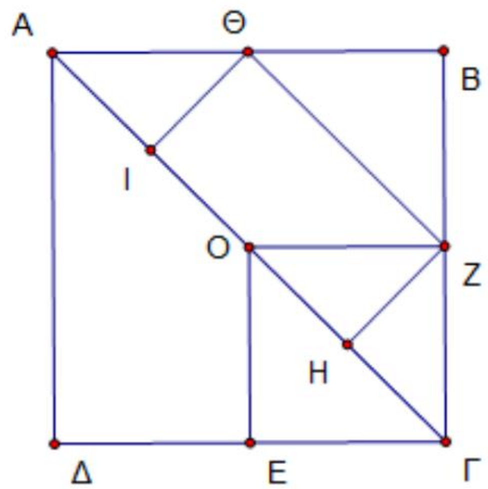

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΟΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ οπότε ΟΖ // ΑΒ. Επειδή ΑΒ $\perp$ ΒΓ θα είναι και ΟΖ $\perp$ ΒΓ.

Στο τρίγωνο ΑΓΔ το ΟΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΓΔ οπότε ΟΕ // ΑΔ. Επειδή ΑΔ $\perp$ ΔΓ θα είναι και ΟΕ $\perp$ ΔΓ.

Άρα το τετράπλευρο ΟΖΓΕ έχει τρεις γωνίες ορθές ($\hat{\mathrm{Z}} = \hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{E}} = 90^0$) οπότε είναι ορθογώνιο. Επιπλέον ισχύει ΓΕ $= \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{\mathrm{AB}}{2} =$ ΓΖ οπότε το ορθογώνιο ΟΖΓΕ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και συνεπώς είναι τετράγωνο.

β) Η ΖΗ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΖΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΟΓ, άρα ΖΗ $= \frac{\mathrm{O}\Gamma}{2} = \frac{\frac{\mathrm{A}\Gamma}{2}}{2} = \frac{\mathrm{A}\Gamma}{4}$.

γ) Το ΘΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ οπότε είναι:

ΘΖ // ΑΓ άρα και ΘΖ // ΗΙ (1).

Ισχύει ακόμη ότι: ΘΖ = $\frac{\mathrm{A}\Gamma}{2}$ = ΗΙ (2) διότι ΗΙ = ΗΟ + ΟΙ $= \frac{\mathrm{A}\Gamma}{4} + \frac{\mathrm{A}\Gamma}{4} = \frac{\mathrm{A}\Gamma}{2}$.

Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ έχει τις απέναντι πλευρές του ΘΖ και ΗΙ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΖΓ, η ΖΗ είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος, δηλαδή $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{H}}\mathrm{O} = 90^o$. Επειδή το παραλληλόγραμμο ΙΘΖΗ έχει μία ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΖΓ ($\hat{\mathrm{Z}} = 90^0$) η ΖΗ είναι διάμεσος άρα ΖΗ =$\frac{\mathrm{O}\Gamma}{2} = \frac{\mathrm{A}\Gamma}{4}$. Οπότε σύμφωνα με τη (2) προκύπτει ΘΖ = 2ΖΗ. Το τετράπλευρο ΘΖΗΙ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ΖΗ = ΘΙ. Συνεπώς ΘΖ = 2ΘΙ.