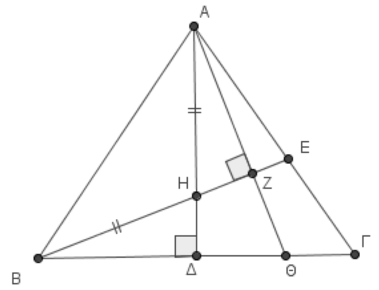
α) i. Τα τρίγωνα ΗΒΔ και ΗΑΖ είναι ορθογώνια και έχουν:

• ΗΑ = ΗΒ, από υπόθεση

• $B\widehat{H}\Delta = A\widehat{H}Z$, ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα ΗΒΔ και ΗΑΖ έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία οπότε είναι ίσα. Τότε και οι αντίστοιχες πλευρές τους ΔΗ και ΗΖ είναι ίσες, δηλαδή ΔΗ = ΗΖ (1).

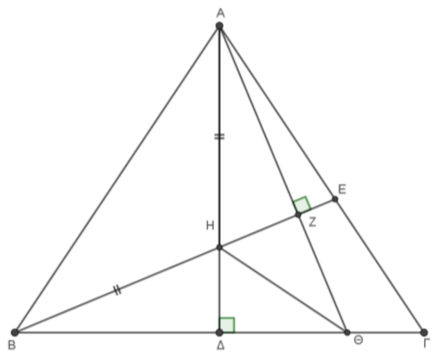


ii. Τα τρίγωνα ΖΗΘ και ΔΗΘ είναι ορθογώνια και έχουν:

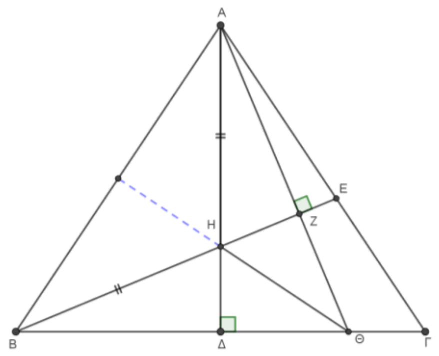
• ΘΗ, κοινή πλευρά

• ΔΗ = ΗΖ, λόγω της (1)

Άρα τα τρίγωνα ΖΗΘ και ΔΗΘ έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία οπότε είναι ίσα. Τότε έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές τους ΔΘ και ΘΖ ίσες, δηλαδή ΔΘ = ΘΖ.



iii. Ισχύει ότι ΗΔ = ΗΖ από το ερώτημα (α.i) και ΘΔ = ΘΖ από το ερώτημα (α.ii). Άρα τα Η και Θ ισαπέχουν από τα Δ και Ζ που είναι άκρα του ΖΔ οπότε η ευθεία ΘΗ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.



β) Τα τμήματα ΑΖ και ΒΔ είναι ύψη του τριγώνου ΑΗΒ που τέμνονται στο Θ. Άρα το Θ είναι το ορθόκεντρο του ΑΗΒ.