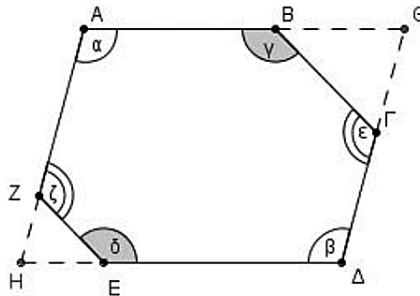


α) Ισχύει ότι $\hat{\alpha} = \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$ (1)

Για τις γωνίες του εξαγώνου ισχύει ότι:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{\delta} + \hat{\varepsilon} + \hat{\zeta} = (6 - 2) \cdot 180^\circ = 720^\circ, \text{ άρα } 2\hat{\alpha} + 2\hat{\gamma} + 2\hat{\varepsilon} = 720^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon} = 360^\circ \quad (2)$$



β) i. Είναι $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon} = 360^\circ$, άρα και $\hat{\alpha} + \hat{\delta} + \hat{\zeta} = 360^\circ$ (3)

Οι γωνίες \widehat{HZE} , $\hat{\zeta}$ και \widehat{HEZ} , $\hat{\delta}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές. Άρα $\widehat{HZE} + \hat{\zeta} = 180^\circ$ και $\widehat{HEZ} + \hat{\delta} = 180^\circ$ (4)

Στο τρίγωνο HZE ισχύει ότι:

$$\widehat{H} + \widehat{HZE} + \widehat{HEZ} = 180^\circ, \text{ και λόγω των (3) και (4) θα είναι } \widehat{H} + 180^\circ - \hat{\zeta} + 180^\circ - \hat{\delta} = 180^\circ,$$

ή $\widehat{H} = \hat{\delta} + \hat{\zeta} - 180^\circ$. Οπότε (λόγω της 3) $\widehat{H} = 360^\circ - \hat{\alpha} - 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{H} + \hat{\alpha} = 180^\circ$. Δηλαδή οι γωνίες \widehat{A} και \widehat{H} είναι παραπληρωματικές.

ii. Οι γωνίες \widehat{H} και \widehat{A} είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΑΘ, ΗΔ που τέμνονται από την ΑΗ και επίσης είναι παραπληρωματικές. Άρα οι ευθείες ΑΘ, ΗΔ είναι παράλληλες.

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι και οι ευθείες ΑΗ και ΘΔ είναι παράλληλες.

Το ΑΘΔΗ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.