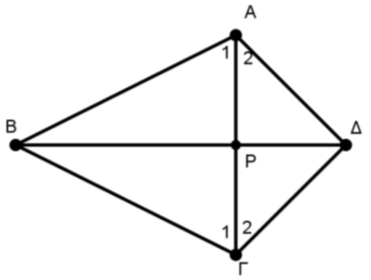
α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ΒΑ = ΒΓ οπότε είναι ισοσκελές. Άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1$. Από υπόθεση είναι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$, οπότε θα είναι και $\widehat{A}_2 = \widehat{\Gamma}_2$ ως διαφορά ίσων γωνιών. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.

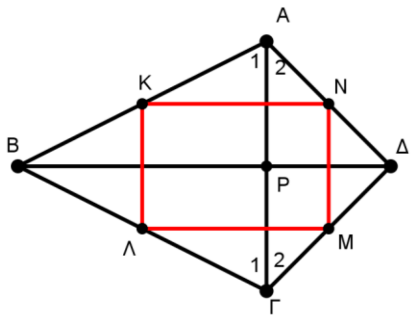


β) Ονομάζουμε Ρ το σημείο τομής των ΑΓ και ΒΔ.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ έχουν:

- ΑΔ = ΔΓ, από το ερώτημα α
- ΒΔ, κοινή πλευρά
- ΑΒ = ΒΓ, από υπόθεση

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Π – Π τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ είναι ίσα οπότε έχουν ίσες και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ΑΔ = ΔΓ , δηλαδή θα είναι $A\widehat{B}\Delta = \Gamma\widehat{B}\Delta$. Άρα στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΡ είναι διχοτόμος, οπότε είναι και ύψος. Ισχύει δηλαδή $A\widehat{O}B = 90^o$, οπότε $B\Delta \perp A\Gamma$.



γ) Ονομάζουμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντιστοίχως.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΚΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Άρα ΚΝ // $= \frac{B\Delta}{2}$ (1).

Όμοια, στο τρίγωνο ΓΒΔ είναι ΛΜ // $= \frac{B\Delta}{2}$ (2).

Από (1), (2) συμπεραίνουμε ότι ΚΝ // = ΛΜ, οπότε το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΚΛ ενώνει τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ άρα ΚΛ // ΑΓ (3)

Επειδή ΑΓ $\perp$ ΒΔ, από τις (1), (3) συμπεραίνουμε ότι ΚΛ $\perp$ ΚΝ, δηλαδή $N\widehat{K}\Lambda = 90^o$. Άρα το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει μία ορθή γωνία, άρα είναι ορθογώνιο.