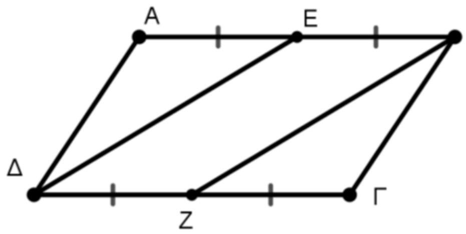
**α)** <u>Απόδειξη ισχυρισμού 1</u>

Είναι ΔΖ = $\frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$ = ΕΒ και ΔΖ // ΕΒ (ως τμήματα των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ).

Δηλαδή το τετράπλευρο ΔΕΒΖ έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.




<u>Απόδειξη ισχυρισμού 2</u>

Επειδή το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι $\Delta\hat{E}B = B\hat{Z}\Delta$. Οπότε, και οι παραπληρωματικές τους $A\hat{E}\Delta$ και $B\hat{Z}\Gamma$ θα είναι ίσες, δηλαδή $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$.

Ο ισχυρισμός 3 δεν είναι αληθής και στο β ερώτημα γίνεται μία αιτιολόγηση.

**β)** <u>Ισχυρισμός 3</u>

Έστω ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$. Τότε $A\widehat{\Delta}E = E\widehat{\Delta}Z$ (1). Ισχύει επιπλέον ότι $A\hat{E}\Delta = E\widehat{\Delta}Z$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΕΔ. Από (1), (2) βρίσκουμε $A\widehat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$. Οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, με ΑΕ = ΑΔ. Τότε ΑΔ = ΑΕ = $\frac{AB}{2} \Leftrightarrow$ ΑΒ = 2ΑΔ. Αν λοιπόν η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$, τότε η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης. Και αντιστρόφως, αν ΑΒ = 2ΑΔ, τότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε $A\widehat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$. Και αφού είναι και $A\hat{E}\Delta = E\widehat{\Delta}Z$, θα έχουμε ότι $A\widehat{\Delta}E = E\widehat{\Delta}Z$, δηλαδή ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$.