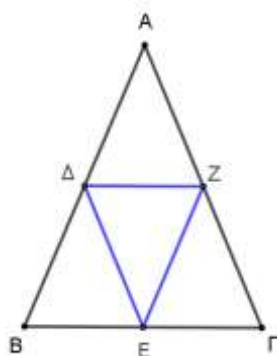


α)



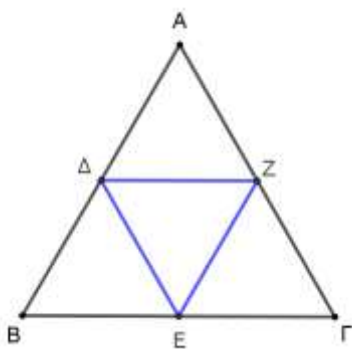
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB=AG$ και Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών AB, BG και AG αντίστοιχα.

Το ΔE ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ABΓ, άρα $ΔE = \frac{AG}{2}$ (1)

Το EZ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ABΓ, άρα $EZ = \frac{AB}{2}$ (2)

Επειδή $AB=AG$ από (1) και (2) προκύπτει ότι $ΔE=EZ$, δηλαδή το τρίγωνο ΔEZ είναι ισοσκελές.

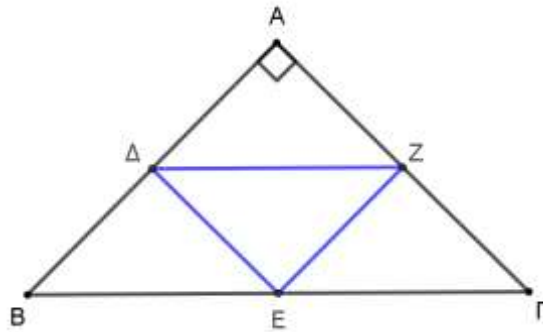
β) i. Πρόταση: «Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισόπλευρου τριγώνου είναι ισόπλευρο».



Επειδή το ΔZ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ABΓ, ισχύει ότι $ΔZ = \frac{BG}{2}$ (3)

Επειδή $AB=BG=AG$ από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $ΔE=EZ=ZΔ$, οπότε το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.

ii. **Πρόταση:** «Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου είναι ορθογώνιο και ισοσκελές».



Έστω ότι $\hat{A} = 90^\circ$, και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Επειδή $\Delta E \parallel A\Gamma$, $Z E \parallel A B$ (ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα 2 πλευρών ενός τριγώνου) και $A B \perp A \Gamma$ θα είναι και $\Delta E \perp Z E$, άρα το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ορθογώνιο με $\hat{E} = 90^\circ$. Επειδή $Z E = \frac{A B}{2}$, $\Delta E = \frac{B \Gamma}{2}$ και $A B = A \Gamma$ θα είναι και $Z E = \Delta E$. Άρα το τρίγωνο ΔΕΖ είναι και ισοσκελές.