α) i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 180^{\mathrm{o}} \Leftrightarrow \widehat{\mathrm{B}} + 2\widehat{\mathrm{B}} = 180^{\mathrm{o}} \Leftrightarrow 3\widehat{\mathrm{B}} = 180^{\mathrm{o}} \Leftrightarrow \widehat{\mathrm{B}} = 60^{\mathrm{o}}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ (ΑΔ ύψος, άρα $\mathrm{A\Delta} \perp \mathrm{B\Gamma}$) για τις οξείες γωνίες του ισχύει:

$\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta + \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta = 90^{\mathrm{o}} \Leftrightarrow \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = 30^{\mathrm{o}}$.

Επειδή η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$, ισχύει ότι: $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta}{2} = \frac{60^{o}}{2} = 30^{\mathrm{o}}$.

Επειδή $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = 30^{\mathrm{o}}$ συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε ΑΖ = ΒΖ.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΖ είναι $\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{B}}\Delta = 30^{\mathrm{o}}$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά του ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $\Delta\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{BZ}}{2}$. Τότε:

ΑΔ = ΑΖ + ΖΔ

ΑΖ=ΒΖ από το i. Ερώτημα

Άρα $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{BZ} + \frac{\mathrm{BZ}}{2} = \frac{3}{2}\mathrm{BZ}$.

β) Αν το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 60^{\mathrm{o}}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ για τις οξείες γωνίες του ισχύει: $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\Gamma + \widehat{\Gamma} = 90^{\mathrm{o}} \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 30^{\mathrm{o}}$. Επίσης από το ερώτημα α) i. είναι $\widehat{\mathrm{B}} = 60^{\mathrm{o}}$ οπότε $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 180^{\mathrm{o}} \Leftrightarrow \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma + 60^{\mathrm{o}} + 30^{\mathrm{o}} = 180^{\mathrm{o}} \Leftrightarrow$ $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = 90^{\mathrm{o}}$.