



α) i. Είναι $ΑΓ = ΟΓ = ΓΔ$ και $ΓΔ = ΔΒ = ΟΔ$, οπότε $ΟΓ = ΓΔ = ΟΔ$. Άρα το τρίγωνο $ΟΓΔ$ είναι ισόπλευρο και οι γωνίες του είναι ίσες με 60° . Άρα $\widehat{ΓΟΔ} = 60^\circ$.

ii. Επειδή $ΟΓ = ΑΓ$, το τρίγωνο $ΟΑΓ$ είναι ισοσκελές οπότε $\widehat{Α}_1 = \widehat{Ο}_1$.

Η γωνία $ΟΓΔ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΟΓΑ$, οπότε:

$$\widehat{ΟΓΔ} = \widehat{Α}_1 + \widehat{Ο}_1 \Leftrightarrow 60^\circ = 2 \widehat{Α}_1 \Leftrightarrow \widehat{Α}_1 = 30^\circ .$$

Η γωνία $ΟΔΒ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΟΓΑ$, άρα:

$$\widehat{ΟΔΒ} = \widehat{Ο}_2 + \widehat{Β}_1 \Leftrightarrow 60^\circ = 2 \widehat{Β}_1 \Leftrightarrow \widehat{Β}_1 = 30^\circ .$$

β) Είναι $\widehat{Α}_1 = \widehat{Β}_1 = 30^\circ$, άρα το τρίγωνο $ΟΑΒ$ είναι ισοσκελές. Η διάμεσος $ΟΜ$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΟΑΒ$ είναι και ύψος του, δηλαδή $ΟΜ \perp ΑΒ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΜΑ$, είναι $\widehat{Α}_1 = 30^\circ$. Άρα για την απέναντι κάθετη πλευρά $ΟΜ$ ισχύει:

$$ΟΜ = \frac{ΟΑ}{2} \Leftrightarrow 2ΟΜ = ΟΑ.$$