



α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε:

$$\Delta E // B\Gamma$$

Επίσης οι προεκτάσεις των πλευρών ΔΒ, ΕΓ, του ΔΕΓΒ, τέμνονται στο Α. Άρα οι ΔΒ και ΕΓ δεν είναι παράλληλες. Επομένως, το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

β) Επίσης, ισχύει $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$, γιατί το ΔΕ ενώνει τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Άρα:

$$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 9 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 18$$

γ) Έστω Π_1 η περίμετρος του ΑΒΓ και Π_2 η περίμετρος του ΔΕΓΒ.

α' τρόπος: Ισχύουν $AB = 2\Delta B$ και $AG = 2AE$. Για τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$$\Pi_1 = AB + B\Gamma + A\Gamma = 2\Delta B + 18 + 2AE = 20 + 18 + 16 = 54$$

Για τη περίμετρο του τετραπλεύρου (τραπεζίου) ΔΕΓΒ έχουμε:

$$\Pi_2 = \Delta E + E\Gamma + \Gamma B + B\Delta = 9 + 8 + 18 + 10 = 45$$

Άρα $\Pi_1 > \Pi_2$.

β' τρόπος: Από την τριγωνική ανισότητα είναι $AD + AE > DE$.

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= AB + B\Gamma + A\Gamma = AD + \Delta B + B\Gamma + AE + E\Gamma = \Delta B + B\Gamma + E\Gamma + (AD + AE) > \Delta B + B\Gamma + E\Gamma + DE \\ &= \Pi_2. \end{aligned}$$

Άρα $\Pi_1 > \Pi_2$.