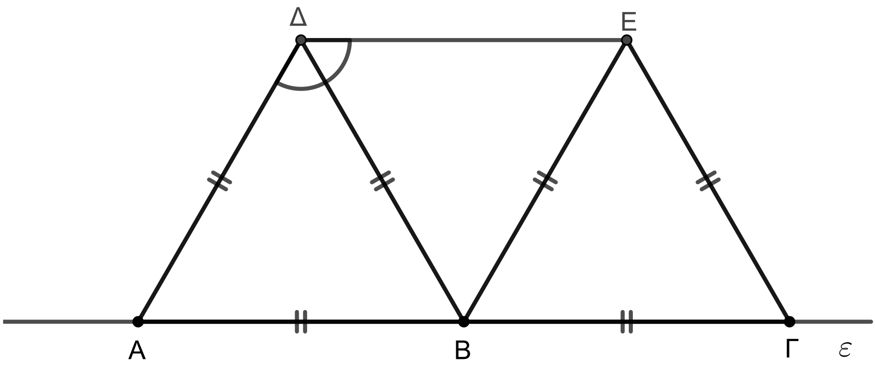
ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ πάνω σε ευθεία ε έτσι ώστε $AB = B\Gamma$ και κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε.



α) Οι γωνίες των ισόπλευρων τριγώνων ΑΒΔ και ΒΓΕ είναι 60° καθεμιά.

Η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι ευθεία, οπότε:

$A\hat{B}\Delta + \Delta\hat{B}E + E\hat{B}\Gamma = 180^\circ$ ή $60^\circ + \Delta\hat{B}E + 60^\circ = 180^\circ$

Άρα, $\Delta\hat{B}E = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

β) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΔ ισχύει:

$$AB = A\Delta = B\Delta \quad (1)$$

Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΕ ισχύει:

$$B\Gamma = BE = \Gamma E \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $B\Delta = BE$, αφού $AB = B\Gamma$ από υπόθεση.

Επομένως, το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ, οπότε οι γωνίες που είναι προσκείμενες στη βάση θα είναι ίσες. Συνεπώς, $B\hat{\Delta}E = B\hat{E}\Delta$ (3).

Στο τρίγωνο ΒΔΕ ισχύει:

$B\hat{\Delta}E + B\hat{E}\Delta + \Delta\hat{B}E = 180^\circ$ ή $B\hat{\Delta}E + B\hat{\Delta}E + 60^\circ = 180^\circ$ ή $2B\hat{\Delta}E = 120^\circ$

Άρα, $B\hat{\Delta}E = 60^\circ$ και $B\hat{E}\Delta = 60^\circ$ λόγω της σχέσης (3).

Αφού οι γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ είναι ίσες με 60° καθεμιά, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.

γ) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΒΔΕ ισχύει:

$$\Delta E = BE = B\Delta \quad (4)$$

Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, αφού $A\Delta = AB = BE = \Delta E$ από τις σχέσεις (1), (2) και (4), οπότε είναι ρόμβος.