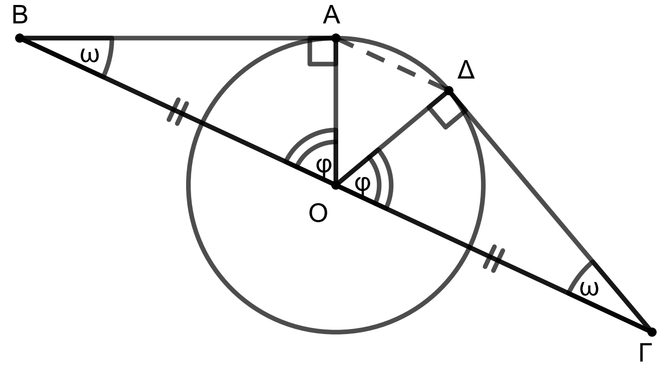
ΛΥΣΗ

α)



i. ΟΑ $\perp$ ΑΒ και ΟΔ $\perp$ ΔΓ διότι ΟΑ και ΟΔ είναι ακτίνες στα σημεία επαφής Α και Δ αντίστοιχα.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ, τα οποία έχουν:

- ΟΑ = ΟΔ, ακτίνες του κύκλου
- ΟΒ = ΟΓ, από την υπόθεση
- $O\hat{A}B = O\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$, αφού ΟΑ $\perp$ ΑΒ και ΟΔ $\perp$ ΔΓ

Τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Άρα θα έχουν ίσες και τις άλλες κάθετες πλευρές τους, δηλαδή ΑΒ = ΔΓ.

ii. Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων του α) i. ερωτήματος προκύπτει ότι $O\hat{B}A = O\hat{\Gamma}\Delta = \omega$, γιατί είναι οξείες γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΟΑ και ΟΔ αντίστοιχα. Επίσης είναι $A\hat{O}B = \Delta\hat{O}\Gamma = \varphi$ ως οξείες γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, με $\omega + \varphi = 90^o$ (1), ως άθροισμα οξειών γωνιών ορθογωνίων τριγώνων.

Για τη γωνία $A\hat{O}\Delta$ έχουμε: $A\hat{O}\Delta = 180^o - 2\varphi = 2(90^o - \varphi) = 2\omega$ λόγω της (1). Το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισοσκελές, αφού ΟΑ = ΟΔ = R. Για τις ίσες του γωνίες $O\hat{A}\Delta$ και $O\hat{\Delta}A$ έχουμε: $O\hat{A}\Delta = O\hat{\Delta}A = \frac{180^\circ - A\hat{O}\Delta}{2} = \frac{180^\circ - 2\omega}{2} = 90^o - \omega = \varphi$, λόγω της (1).

Άρα $O\hat{A}\Delta = A\hat{O}B = \varphi$ και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΟΑ, οπότε ΑΔ//ΒΓ.

β) Αν το μήκος του ΒΑ είναι ίσο με R, τότε από το α) ερώτημα τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ θα είναι και ισοσκελή, αφού ΟΑ = ΑΒ = ΟΔ = ΔΓ = R. Επομένως οι γωνίες ω και φ θα είναι ίσες και η καθεμία θα ισούται με 45^o. Τότε $A\hat{O}\Delta = 180^o - 2\varphi = 90^o$, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΔ έχει τη γωνία της κορυφής του ορθή, άρα είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.