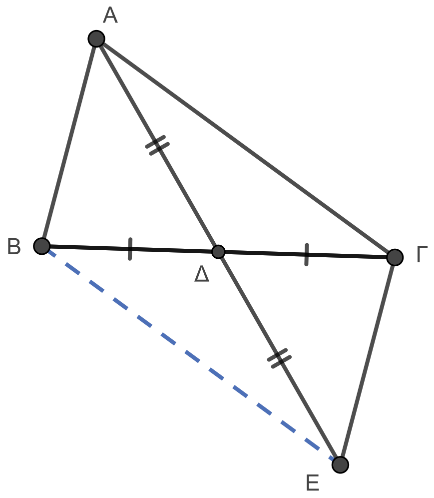

α)

i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ έχουν:

- ΑΔ = ΔΕ, από υπόθεση
- ΒΔ = ΔΓ, διότι Δ μέσο της ΒΓ
- $Α\widehat{Δ}Β = Ε\widehat{Δ}Γ$ ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές, ίσες, οπότε από το κριτήριο ΠΓΠ είναι ίσα. Επομένως θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΑΒ=ΓΕ (1).

i. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε : ΑΕ <ΑΓ + ΓΕ και με τη βοήθεια της σχέσης (1) προκύπτει ΑΕ < ΑΓ + ΑΒ. Όμως ΑΕ = 2ΑΔ, οπότε έχουμε ότι 2ΑΔ < ΑΒ + ΑΓ ή $ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ}{2}$. Δηλαδή η διάμεσος ΑΔ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ που την περιέχουν.

β) Δίνεται ότι 2ΑΔ = ΒΓ ή ΑΕ = ΒΓ. Δηλαδή στο τετράπλευρο ΑΒΕΓ οι διαγώνιές του είναι ίσες. Επιπλέον έχουμε ότι ΑΔ = ΔΕ από την κατασκευή και ότι ΒΔ = ΔΓ, αφού Δ μέσο της ΒΓ. Δηλαδή οι διαγώνιες του τετράπλευρου ΑΒΕΓ διχοτομούνται, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επιπλέον είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τότε στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{Α} = 90^{o}$, αφού το ΑΒΕΓ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, άρα το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.