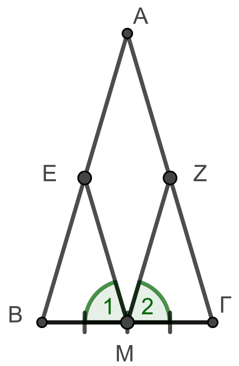
ΛΥΣΗ

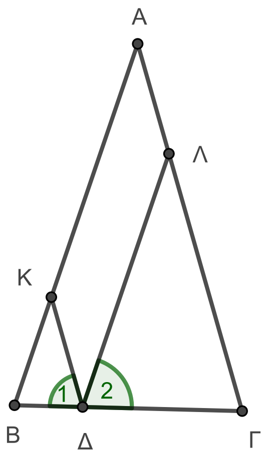
α) Έστω Μ το μέσο της βάσης ΒΓ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ τότε :




i. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ΜΕ//ΑΓ, οπότε το Ε θα είναι μέσο της ΑΒ και ΜΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$ (1), ομοίως επειδή από το μέσο Μ φέρουμε ΜΖ//ΑΒ θα είναι Ζ μέσο της ΑΓ και ΜΖ = $\frac{ΑΒ}{2}$ (2). Επιπλέον δίνεται ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, οπότε από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΜΕ = ΜΖ.

ii. Από την υπόθεση είναι ΜΕ//ΑΓ ή ΜΕ//ΑΖ και ΜΖ//ΑΒ ή ΜΖ//ΑΕ, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΜΖ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ΜΕ και ΜΖ είναι ίσες από το α)i. ερώτημα, οπότε το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος. Η περίμετρος του ρόμβου αυτού είναι ίση με ΑΕ + ΕΜ + ΜΖ + ΑΖ = 4 ΑΕ = 4 $\frac{ΑΒ}{2}$ = 2ΑΒ. Διότι το τετράπλευρο είναι ρόμβος οπότε οι τέσσερις πλευρές του είναι ίσες με ΑΕ και ΑΕ= $\frac{ΑΒ}{2}$, αφού Ε μέσο της ΑΒ.

β) Αν το Δ είναι τυχαίο σημείο στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου, όπως στο σχήμα



i. Από την κατασκευή οι απέναντι πλευρές του τετράπλευρου ΑΚΔΛ είναι παράλληλες, αφού ΔΚ//ΑΓ ή ΔΚ//ΑΛ και ΔΛ//ΑΒ ή ΔΛ//ΑΚ. Άρα το ΑΚΔΛ είναι παραλληλόγραμμο. Θα αποδείξουμε ότι το ΑΚΔΛ, όταν το Δ δεν είναι το μέσο του ΒΓ δε μπορεί να είναι ρόμβος.

   Οι γωνίες $\widehat{Γ}$ και $\widehat{Δ}_1$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΚ και ΑΓ με τέμνουσα την ΒΓ, οπότε $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Γ}$, άρα $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Β}$, (αφού οι γωνίες $\widehat{Β}$ και $\widehat{Γ}$ είναι ίσες ως γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου) . Οπότε το ΒΚΔ είναι ισοσκελές τρίγωνο με ΚΔ = ΚΒ (1). Όμοια οι γωνίες $\widehat{Β}$ και $\widehat{Δ}_2$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΛ και ΑΒ με τέμνουσα την ΒΓ, οπότε $\widehat{Δ}_2 = \widehat{Β}$ , άρα $\widehat{Δ}_2 = \widehat{Γ}$. Άρα το τρίγωνο ΔΛΓ είναι ισοσκελές με ΛΔ = ΛΓ (2). Επειδή $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Β}$, $\widehat{Δ}_2 = \widehat{Γ}$ και $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$ , προκύπτει ότι $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Δ}_2 = \widehat{Β} = \widehat{Γ}$. Δηλαδή τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ έχουν τις γωνίες της βάσης τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες τους, $Β\widehat{Κ}Δ$ και $Γ\widehat{Λ}Δ$, θα είναι μεταξύ τους ίσες. Αν το Δ δεν ταυτίζεται με το μέσο Μ της ΒΓ τα τμήματα ΒΔ και ΔΓ δεν είναι ίσα, οπότε και τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ δεν είναι ίσα. (Αν ήταν ίσα θα έπρεπε και οι πλευρές ΒΔ και ΔΓ που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $Β\widehat{Κ}Δ$ και $Γ\widehat{Λ}Δ$ αντίστοιχα, να είναι ίσες). Οι πλευρές ΔΚ και ΔΛ δεν είναι ίσες, γιατί αν ήταν ίσες, τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ θα ήταν ίσα από το κριτήριο ΓΠΓ. Άτοπο, αφού αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ δεν είναι ίσα.

   Οπότε οι διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΚΔΛ δεν είναι ίσες , επομένως αυτό δεν είναι πια ρόμβος.

ii. Για την περίμετρο του παραλληλογράμμου ΑΚΔΛ έχουμε ότι είναι ίση με ΑΚ + ΚΔ + ΔΛ + ΛΑ με τη βοήθεια των σχέσεων (1) και (2) του β)i. ερωτήματος η περίμετρος γίνεται ίση με ΑΚ + ΚΒ +ΓΛ + ΛΑ = ΑΒ + ΑΓ = ΑΒ + ΑΒ = 2ΑΒ.

Παρατηρούμε ότι η περίμετρος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται όταν το Δ είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερή και ίση με 2ΑΒ.