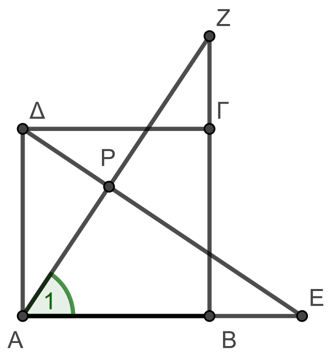
α)



i. AB = BΓ, ως πλευρές του τετραγώνου, BE = ΓZ, από την υπόθεση. Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες έχουμε AE=BZ (1), ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

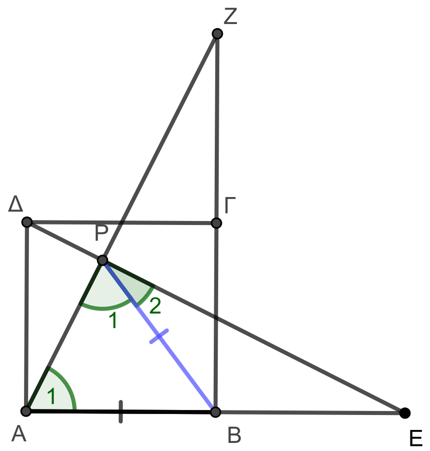
Στα ορθογώνια τρίγωνα AΔE και ABZ:

- AΔ = AB, ως πλευρές του τετραγώνου ABΓΔ
- AE = BZ, από τη σχέση (1)
- $\Delta\widehat{A}E = A\widehat{B}Z = 90^o$

Τα ορθογώνια τρίγωνα AΔE και ABZ έχουν τις κάθετες πλευρές τους μια προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα. Οι γωνίες $A\widehat{E}\Delta$ και $B\widehat{Z}A$ είναι ίσες γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές AΔ και AB αντίστοιχα.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABZ το άθροισμα των δύο οξειών γωνιών του είναι 90^o. Δηλαδή ισχύει $\widehat{A}_1 + B\widehat{Z}A = 90^o$, αλλά $B\widehat{Z}A = A\widehat{E}\Delta$, από το α)i. ερώτημα, οπότε $\widehat{A}_1 + A\widehat{E}\Delta = 90^o$ ή $\widehat{A}_1 + A\widehat{E}P = 90^o$ (όπου P το σημείο τομής των AZ και ΔE). Στο τρίγωνο AEP το άθροισμα δύο γωνιών του είναι 90^o , οπότε η τρίτη γωνία του θα είναι 90^o. Δηλαδή $A\widehat{P}E = 90^o$, έτσι τα τμήματα AZ και ΔE είναι κάθετα.

β)



Από την υπόθεση ΡΒ = ΑΒ , άρα το τρίγωνο ΒΑΡ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{A}_1 = \widehat{P}_1$, ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του. Από το προηγούμενο ερώτημα $\widehat{A}_1$ + Α$\widehat{E}$Ρ = 90^o, ως άθροισμα των οξειών γωνιών ορθογωνίου τριγώνου, οπότε $\widehat{P}_1$ + Α$\widehat{E}$Ρ = 90^o (1). Επιπλέον ισχύει $\widehat{P}_1 + \widehat{P}_2$ = 90^o (2) επειδή Α$\widehat{P}$Ε = 90^o από το α)ii. Από τις (1) και (2) έχουμε Α$\widehat{E}$Ρ = $\widehat{P}_2$, ή Β$\widehat{E}$Ρ = $\widehat{P}_2$, άρα το τρίγωνο ΒΕΡ είναι ισοσκελές με ΕΒ = ΡΒ. Όμως ΡΒ = ΑΒ, από υπόθεση, οπότε ΒΕ = ΑΒ και η θέση του σημείου Ε προσδιορίζεται στην προέκταση του ΑΒ ώστε ΒΕ = ΑΒ.