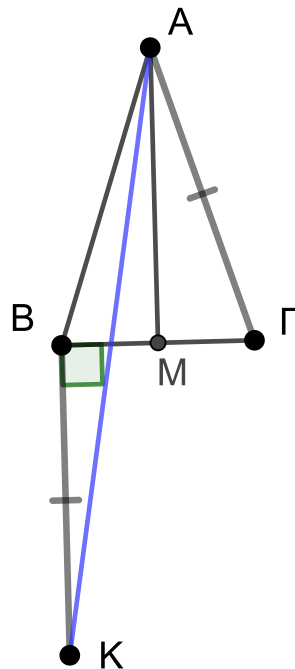


Έστω το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το μέσο M της πλευράς του $B\Gamma$. Φέρουμε $BK \perp B\Gamma$ στο σημείο B και θεωρούμε τμήμα $BK=AG$.



α) Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, το τμήμα AM είναι η διάμεσος προς τη βάση του $B\Gamma$, οπότε το AM είναι και ύψος και διχοτόμος της γωνίας A . Δηλαδή $AM \perp B\Gamma$ και επιπλέον οι γωνίες BAM και ΓAM είναι ίσες.

Από την κατασκευή $KB \perp B\Gamma$ και επειδή $AM \perp B\Gamma$, τότε $AM \parallel KB$, ως κάθετες στη $B\Gamma$ σε διαφορετικά σημεία της. Επιπλέον δίνεται ότι $BK = AG$ και ξέρουμε ότι οι πλευρές AB και AG είναι ίσες, οπότε $AB = BK$.

β) Δείξαμε στο ερώτημα α) ότι $AB = BK$, άρα το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{B\hat{A}K} = \widehat{B\hat{K}A}$. Επιπλέον έχουμε ότι $AM \parallel BK$, οπότε οι γωνίες $\widehat{K\hat{A}M}$ και $\widehat{B\hat{K}A}$ θα είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των $AM \parallel BK$ που τέμνονται από την AK . Άρα ισχύει ότι $\widehat{B\hat{A}K} = \widehat{B\hat{K}A} = \widehat{K\hat{A}M}$ (1) οπότε η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\hat{A}M}$.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ABK οι τρεις γωνίες του έχουν άθροισμα 180° , δηλαδή $\widehat{B\hat{A}K} + \widehat{K\hat{B}A} + \widehat{B\hat{K}A} = 180^\circ$. Επιπλέον $\widehat{K\hat{B}A} = \widehat{A\hat{B}\Gamma} + 90^\circ$, οπότε λόγω της (1) έχουμε: $2\widehat{B\hat{K}A} + \widehat{B} + 90^\circ = 180^\circ$ ή αλλιώς $2\widehat{B\hat{K}A} + \widehat{B} = 90^\circ$. Όμως οι γωνίες B και Γ είναι ίσες ως

γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου, οπότε $2 \widehat{BKA} = 90^\circ - \widehat{\Gamma}$. Επομένως $\widehat{BKA} = 45^\circ - \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$.

δ) Το τετράπλευρο ABKM έχει τις δυο απέναντι πλευρές του AM και BK παράλληλες. Αν ήταν παραλληλόγραμμο οι AM και BK θα ήταν και ίσες. Αν $AM = BK$ τότε θα ισχύει ότι $AM = AB$. Όμως τα τμήματα AM και AB είναι κάθετο και πλάγιο τμήμα αντίστοιχα προς τη ΒΓ, οπότε ισχύει ότι $AM < AB$. Συνεπώς έχουμε ότι $AM < KB$ και το τετράπλευρο ABKM δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο.