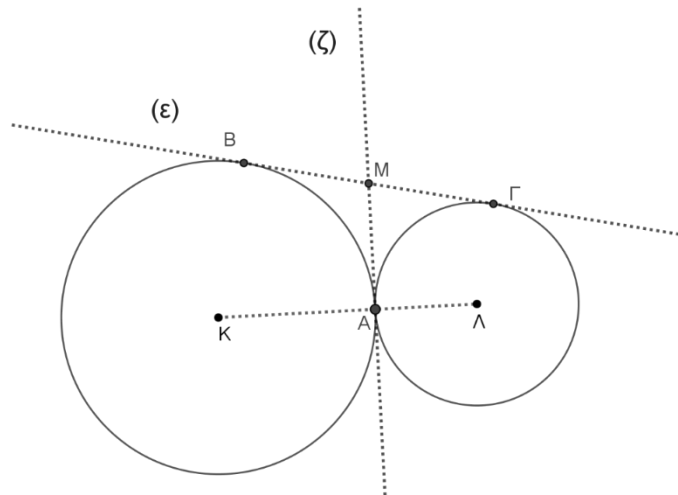


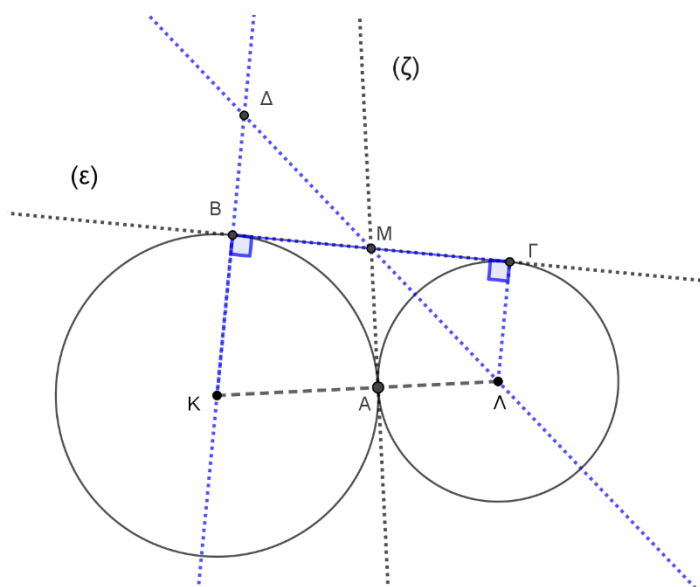
ΛΥΣΗ

Έστω οι κύκλοι  $(K, \rho_1)$  και  $(\Lambda, \rho_2)$  οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο  $A$ ,  $(\epsilon)$  η ευθεία η οποία εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα. Έστω  $(\zeta)$  η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους  $A$  και  $M$  το σημείο τομής της με την ευθεία  $(\epsilon)$ .



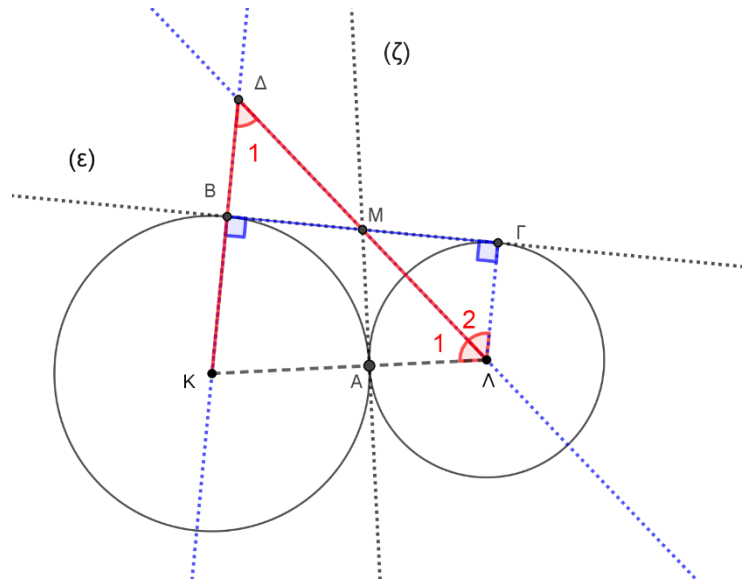
α) Έστω  $KB$  και  $\Lambda\Gamma$  οι ακτίνες των δυο κύκλων  $(K, \rho_1)$  και  $(\Lambda, \rho_2)$  στα σημεία επαφής  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα. Τότε τα  $KB$  και  $\Lambda\Gamma$  θα είναι κάθετα στην  $(\epsilon)$ , οπότε θα είναι  $KB \parallel \Lambda\Gamma$  ως κάθετες στην ίδια ευθεία  $(\epsilon)$ .

Η  $\Lambda M$  δεν είναι κάθετη στην  $(\epsilon)$ , γιατί αν η  $\Lambda M$  ήταν κάθετη στη  $(\epsilon)$  τότε από το σημείο  $\Lambda$  θα άγονταν δυο κάθετες στην  $(\epsilon)$ , η  $\Lambda M$  και η  $\Lambda\Gamma$  ως ακτίνες στο σημείο επαφής  $\Gamma$  του κύκλου  $(\Lambda, \rho_2)$  με την ευθεία  $(\epsilon)$ , που είναι άτοπο, και αφού η  $\Lambda M$  τέμνει την  $\Lambda\Gamma$  στο  $\Lambda$  θα τέμνει και την παράλληλή της την  $KB$  έστω σε σημείο  $\Delta$ .



β) Είναι  $K\Delta \parallel \Lambda\Gamma$  και τις τέμνει η  $\Lambda\Delta$ , οπότε  $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Lambda}_2$  (1) ως γωνίες εντός εναλλάξ.

Η ΔΛ είναι διακεντρική ευθεία του σημείου Μ στον κύκλο (Λ, ρ<sub>2</sub>), οπότε θα διχοτομεί τη γωνία ΓΛΑ των ακτίνων στα σημεία επαφής Γ και Α, δηλαδή είναι  $\widehat{\Lambda}_2 = \widehat{\Lambda}_1$  (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι  $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Lambda}_1$ . Οπότε το τρίγωνο ΔΚΛ έχει δυο γωνίες ίσες, άρα θα είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΚΛ και ΚΔ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες  $\widehat{\Delta}_1$  και  $\widehat{\Lambda}_1$  αντίστοιχα.



γ) Το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ με ίσες πλευρές τις ΚΛ, ΚΒ θα είναι ορθογώνιο όταν  $\widehat{\Delta\text{Κ}\Lambda} = 90^\circ$ . Αν  $\widehat{\Delta\text{Κ}\Lambda} = 90^\circ$  τότε η ΚΛ είναι κάθετη στην ΚΔ. Αν η ΚΛ είναι κάθετη στην ΚΔ, τότε η ΚΛ θα είναι παράλληλη με την ευθεία (ε) ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΚΔ, οπότε και το τετράπλευρο ΚΛΓΒ θα είναι ορθογώνιο γιατί θα είχε τρεις ορθές γωνίες, τις  $\widehat{\Delta\text{Κ}\Lambda}$ ,  $\widehat{\text{Κ}\text{Β}\Gamma}$  και  $\widehat{\Lambda\Gamma\text{Β}}$ . Αν το ΚΛΓΒ είναι ορθογώνιο τότε θα ισχύει ΚΒ = ΛΓ ή  $\rho_1 = \rho_2$ . Επομένως, αν οι κύκλοι είναι ίσοι, τότε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ θα είναι ορθογώνιο.