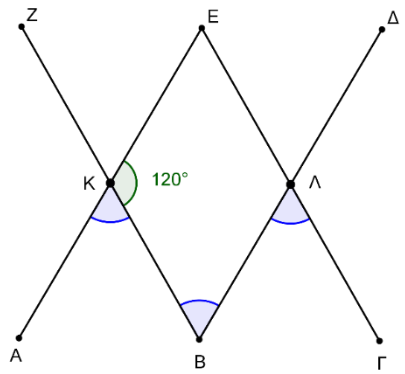
ΛΥΣΗ

α) Οι γωνίες $A\widehat{K}B$ και $B\widehat{K}E$ είναι παραπληρωματικές, οπότε ισχύει $A\widehat{K}B + B\widehat{K}E = 180^0$ και αφού $B\widehat{K}E = 120^0$ τότε $A\widehat{K}B + 120^0 = 180^0$ ή $A\widehat{K}B = 180^0 - 120^0$ ή $A\widehat{K}B = 60^0$ (1)

Είναι $A\widehat{K}B = K\widehat{B}\Lambda$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ και ΒΔ με τέμνουσα την ΒΖ και αφού είναι $A\widehat{K}B = 60^0$ από τη σχέση (1), θα είναι και $K\widehat{B}\Lambda = 60^0$ (2).

Είναι $K\widehat{B}\Lambda = B\widehat{\Lambda}\Gamma$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΖ και ΓΕ με τέμνουσα την ΒΔ και αφού είναι $K\widehat{B}\Lambda = 60^0$ από σχέση (2), θα είναι και $B\widehat{\Lambda}\Gamma = 60^0$ (3)

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $A\widehat{K}B = K\widehat{B}\Lambda = B\widehat{\Lambda}\Gamma = 60^0$ (4).



β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ έχουν:

- ΑΚ = ΒΛ = 20 cm, ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΕ και ΒΔ μήκους 40 cm όπου Κ και Λ τα μέσα τους.
- ΚΒ = ΛΓ = 20 cm, ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΖ και ΓΕ μήκους 40 cm όπου Κ και Λ τα μέσα τους.
- $A\widehat{K}B = B\widehat{\Lambda}\Gamma = 60^0$, από σχέση (4)

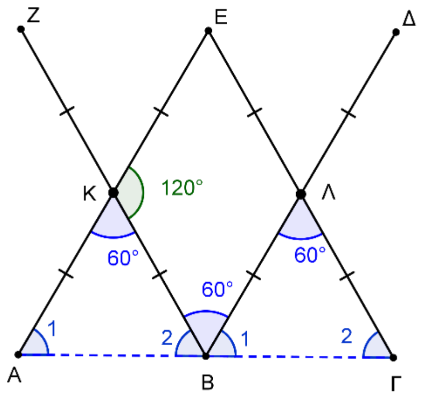
Επομένως τα τρίγωνα θα είναι ίσα, γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Οπότε θα είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ και $\widehat{B}_2 = \widehat{\Gamma}_2$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΚΒ, ΛΓ και ΚΑ, ΛΒ αντίστοιχα.

Επειδή είναι ΑΚ= ΚΒ = 20 cm, το τρίγωνο ΑΚΒ θα είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε θα έχει τις προσκείμενες στη βάση του γωνίες ίσες, δηλαδή $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$ (5).

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΚΒ ισχύει ότι $\widehat{A}_1 + A\widehat{K}B + \widehat{B}_2 = 180^0$ και αφού είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$ από σχέση (5) και $A\widehat{K}B = 60^0$ τότε $2\widehat{A}_1 + 60^0 = 180^0$ ή $2\widehat{A}_1 = 180^0 - 60^0$ ή $2\widehat{A}_1 = 120^0$ ή $\widehat{A}_1 = 60^0$ (6).

Από σχέσεις (4), (5) και (6) προκύπτει ότι $A\widehat{K}B = \widehat{A}_1 = \widehat{B}_2 = 60^0$.

Συνεπώς, το τρίγωνο ΑΚΒ θα είναι ισόπλευρο γιατί έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, οπότε και το ίσο του τρίγωνο ΒΛΓ θα είναι και αυτό ισόπλευρο, οπότε κάθε γωνία του θα είναι ίση με 60^0, δηλαδή $\mathrm{B}\widehat{\Lambda}\Gamma = \widehat{\Gamma}_2 = \widehat{\mathrm{B}}_1 = 60^0$.



γ) Για να είναι τα Α, Β και Γ σημεία της ίδιας ευθείας, αρκεί να δειχθεί ότι η γωνία $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$ είναι ευθεία γωνία ή ότι $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = 180^0$.

Είναι $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \widehat{\mathrm{B}}_2 + \mathrm{K}\widehat{\mathrm{B}}\Lambda + \widehat{\mathrm{B}}_1 = 3 \cdot 60^0 = 180^0$, αφού είναι $\widehat{\mathrm{B}}_2 = \widehat{\mathrm{B}}_1 = 60^0$ ως γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων ΑΚΒ και ΒΛΓ. Επομένως, τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.