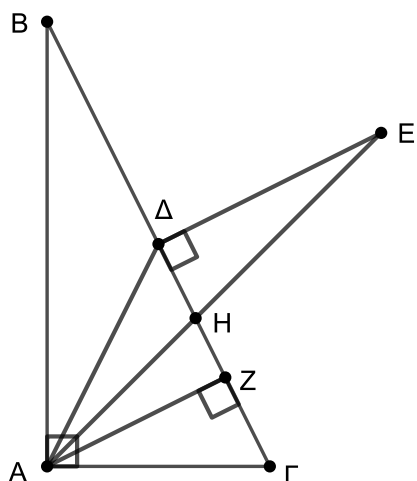


ΛΥΣΗ



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , η  $AD$  είναι διάμεσος στην υποτείνουσα  $B\Gamma$ , οπότε  $AD = DB = DG$ .

Οι οξείες γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι συμπληρωματικές, οπότε:

$$\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma} \quad (1)$$

Οι οξείες γωνίες  $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z}$  και  $\hat{\Gamma}$  του ορθογωνίου τριγώνου  $ZA\Gamma$  είναι συμπληρωματικές, οπότε:

$$\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z} = 90^\circ - \hat{\Gamma} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι  $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z} = \hat{B}$ .

Το τρίγωνο  $ABD$  είναι ισοσκελές με  $AD = DB$ , οπότε θα είναι  $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} = \hat{B}$ .

Επομένως, οι γωνίες  $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z}$  και  $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{B}$  θα είναι ίσες, δηλαδή  $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{B}$  (3).

β) Η  $AH$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ , οπότε  $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{H} = \hat{H}\hat{A}\hat{B}$  (4).

Με αφαίρεση των σχέσεων (3) και (4) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{H} - \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z} = \hat{H}\hat{A}\hat{B} - \hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} \quad \text{ή} \quad \hat{Z}\hat{A}\hat{H} = \hat{H}\hat{A}\hat{\Delta} \quad (5).$$

Επίσης,  $AZ \parallel DE$  διότι είναι κάθετες στη  $B\Gamma$ .

Άρα,  $\hat{Z}\hat{A}\hat{H} = \hat{E}$  (6), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων  $AZ$  και  $DE$  τεμνόμενων από την  $AE$ .

Από τις ισότητες (5) και (6) προκύπτει ότι  $\hat{H}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{E}$ , οπότε θα είναι ίσες και οι απέναντι πλευρές τους  $\Delta E$  και  $A\Delta$  αντίστοιχα στο τρίγωνο  $A\Delta E$ , δηλαδή  $\Delta E = A\Delta$ .

γ) Είναι  $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z} + \hat{Z}\hat{A}\hat{\Delta} + \hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}$ , οπότε:

$\widehat{Z\Delta} = \widehat{A} - \widehat{\Gamma\Delta Z} - \widehat{\Delta\Delta B} = 90^\circ - \widehat{B} - \widehat{B} = \widehat{\Gamma} - \widehat{B}$ , αφού είναι  $\widehat{\Gamma\Delta Z} = \widehat{\Delta\Delta B} = \widehat{B}$  και  $\widehat{\Gamma} = 90^\circ - \widehat{B}$ .