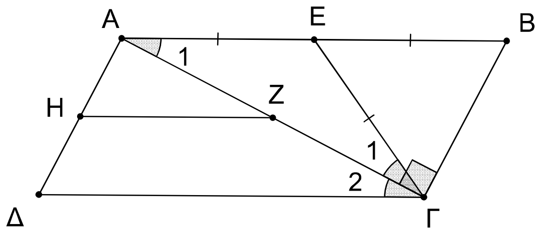

α) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΓΕ είναι η διάμεσος από την κορυφή της ορθής γωνίας $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β}$, άρα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας ΑΒ, δηλαδή $\text{ΓΕ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$ (1).

Στο τρίγωνο ΑΓΔ το τμήμα ΖΗ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΔ, άρα είναι $\text{ΖΗ} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Όμως $\text{ΑΒ} = \Gamma\Delta$, γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα $\text{ΖΗ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$ (2).

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $\text{ΓΕ} = \text{ΖΗ}$.

ii. Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές με $\text{ΑΕ} = \text{ΓΕ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$, άρα είναι $\hat{\text{Α}}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (3) ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του ΑΓ.

Επίσης $\hat{\text{Α}}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (4) ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ. Από τις ισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$, δηλαδή η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{\Gamma}\text{Ε}$.

β) Η δοσμένη ισότητα $\Delta\text{Η} = \frac{\text{ΑΒ}}{4}$ ισοδύναμα γράφεται $2\Delta\text{Η} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$ (5).

Όμως Η είναι το μέσο της ΑΔ, άρα $2\Delta\text{Η} = \text{Α}\Delta$ και επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο είναι $\text{Α}\Delta = \text{ΒΓ}$. Άρα $2\Delta\text{Η} = \text{ΒΓ}$ (6).

Από τις ισότητες (5) και (6) προκύπτει ότι $\text{ΒΓ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η κάθετη πλευρά ΒΓ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΒ, συνεπώς οι οξείες γωνίες του είναι $\hat{\text{Α}}_1 = 30^o$ ως απέναντι της πλευράς ΒΓ και $\hat{\text{Β}} = 60^o$ ως συμπληρωματική της $\hat{\text{Α}}_1$.

Το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές με $\text{ΓΕ} = \text{ΕΒ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$. Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΒΓΕ είναι οι $\hat{\text{Β}}$, $\text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Β}$. Όμως είναι $\hat{\text{Β}} = 60^o$, οπότε θα είναι $\text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Β} = 60^o$ και επειδή το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^o θα είναι και $\text{Β}\hat{\text{Ε}}\Gamma = 60^o$. Άρα το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισόπλευρο, γιατί έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες.