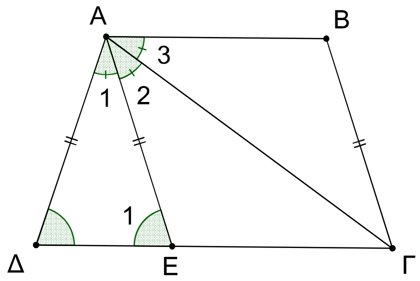

α) Αφού τα τμήματα ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία $\widehat{\text{Α}} = 108^\text{o}$, θα είναι

$\widehat{\text{Α}}_1 = \widehat{\text{Α}}_2 = \widehat{\text{Α}}_3 = \frac{\widehat{\text{Α}}}{3} = \frac{108^\text{o}}{3} = 36^\text{o}$.

Οι γωνίες $\widehat{\text{Α}}$ και $\hat{\Delta}$ του τραπεζίου είναι παραπληρωματικές, γιατί είναι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ. Άρα $\hat{\Delta} = 180^\text{o} - \widehat{\text{Α}} = 180^\text{o} - 108^\text{o} = 72^\text{o}$.

Είναι $\hat{\text{Ε}}_1 = \text{Β}\widehat{\text{Α}}\text{Ε}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ. Άρα $\hat{\text{Ε}}_1 = \text{Β}\widehat{\text{Α}}\text{Ε} = \widehat{\text{Α}}_2 + \widehat{\text{Α}}_3 = 36^\text{o} + 36^\text{o} = 72^\text{o}$.

β) i. Από το ερώτημα α) έχουμε ότι $\hat{\Delta} = \hat{\text{Ε}}_1 = 72^\text{o}$ (1), συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με $\text{ΑΔ} = \text{ΑΕ}$ (2), γιατί έχει δύο γωνίες ίσες.

ii. Οι προσκείμενες γωνίες $\text{Β}\hat{\Gamma}\Delta$ και $\hat{\Delta}$ στη βάση ΓΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ίσες, γιατί το τραπέζιο είναι ισοσκελές. Άρα $\text{Β}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Delta}$ (3).

Από τις ισότητες (1) και (3) προκύπτει ότι $\text{Β}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\text{Ε}}_1$, οπότε οι ΑΕ, ΒΓ είναι παράλληλες, γιατί τεμνόμενες από τη ΓΔ σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

Είναι $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$ (4), γιατί το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές. Από τις ισότητες (2) και (4) προκύπτει ότι $\text{ΑΕ} = \text{ΒΓ}$. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΕ, ΒΓ είναι ίσες και παράλληλες. Όμως η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\text{Β}\widehat{\text{Α}}\text{Ε}$, αφού από το ερώτημα α) έχουμε ότι $\widehat{\text{Α}}_2 = \widehat{\text{Α}}_3 = 36^\text{o}$. Συνεπώς το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος, γιατί είναι παραλληλόγραμμο και η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί τη γωνία του $\text{Β}\widehat{\text{Α}}\text{Ε}$.