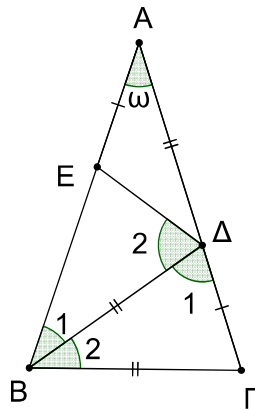


α) Έστω $\hat{A} = \omega$ (1).



i. Γνωρίζουμε ότι $AD = BD$, άρα το τρίγωνο ABD είναι ισοσκελές με βάση AB , οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B}_1 = \omega$ (2).

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ABD , άρα είναι $\hat{\Delta}_1 = 2\omega$ (3).

Είναι $BG = BD$ (από τα δεδομένα), άρα το τρίγωνο BGD είναι ισοσκελές με βάση GD , οπότε οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_1$, οπότε λόγω της σχέσης (3) θα είναι $\hat{\Gamma} = 2\omega$ (4).

Από τις σχέσεις (1), (4) προκύπτει ότι $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}$.

ii. Το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές με $AB = AG$ (από τα δεδομένα), οπότε και οι προσκείμενες στη βάση BG γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα θα είναι και $\hat{B} = 2\omega$ (5) λόγω της σχέσης (4).

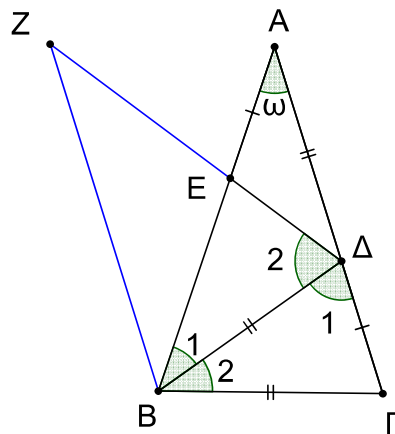
Στο τρίγωνο ABG ισχύει ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$. Αξιοποιώντας τις σχέσεις (1), (4) και (5) θα είναι $\omega + 2\omega + 2\omega = 180^\circ$ ή $\omega = 36^\circ$. Άρα $\hat{A} = 36^\circ$.

iii. Ένας τρόπος να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές είναι να αποδείξουμε ότι $AE = DE$. Όμως από τα δεδομένα είναι $AE = DG$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $DE = DG$. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα BGD και BED τα οποία έχουν:

- $BD = BD$, κοινή πλευρά.
- $BG = BE$, γιατί $BG = AD$ από τα δεδομένα και $BE = AD$ ως διαφορές των ίσων τμημάτων $AB = AG$ και $AE = GD$.
- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, αφού $\hat{B}_1 = \omega = 36^\circ$ και $\hat{B}_2 = \hat{B} - \hat{B}_1 = 2\omega - \omega = 36^\circ$.

Τα τρίγωνα BGD και BED είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Άρα θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες \hat{B}_1, \hat{B}_2 , δηλαδή $DE = DG$.

β)



Στην ισότητα των τριγώνων ΒΓΔ και ΒΕΔ έχουμε αποδείξει ότι $B\Gamma = BE$, οπότε και οι αντίστοιχες γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από τη σχέση (3) έχουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = 72^\circ$, άρα $\hat{\Delta}_2 = 72^\circ$.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΒΔ έχουν:

- $B\Gamma = B\Delta$, από τα δεδομένα.
- $AG = Z\Delta$, από το δεδομένο του ερωτήματος.
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2 = 72^\circ$.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΒΔ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Όμως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, οπότε και το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.