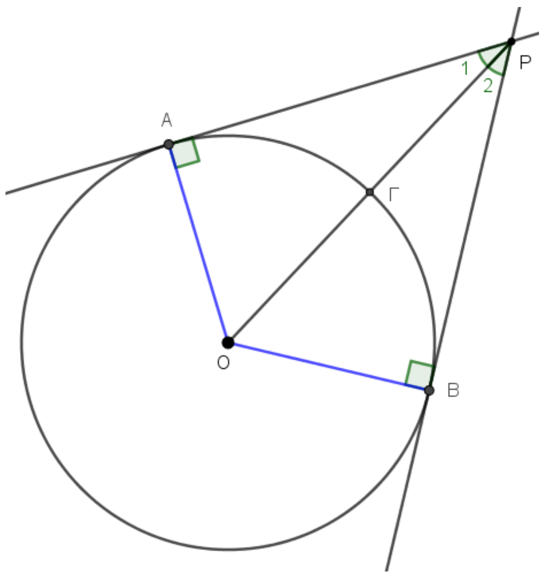
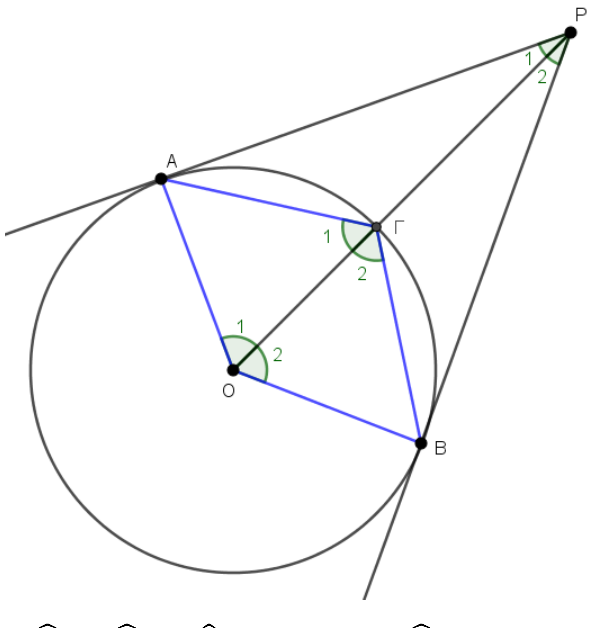


α) Φέρουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ που είναι κάθετες στα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Επομένως τα τρίγωνα ΟΑΡ και ΟΒΡ είναι ορθογώνια.

Η ΡΟ είναι διχοτόμος της $\mathrm{A\hat{P}B} = 60^{o}$, οπότε $\hat{\mathrm{P}}_1 = \hat{\mathrm{P}}_2 = 30^{o}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΡ είναι $\hat{\mathrm{P}}_1 = 30^{o}$, οπότε η απέναντι της γωνίας κάθετη πλευρά ΟΑ = $\frac{\mathrm{PO}}{2}$, δηλαδή ΡΟ = 2ρ, αφού ΟΑ = ΟΒ = ρ.



β) Στο τρίγωνο ΟΡΑ: $\widehat{\mathrm{O}}_1 + \mathrm{O\widehat{A}P} + \mathrm{O\widehat{P}A}$ = 180^{o}. Άρα, $\widehat{\mathrm{O}}_1$= 180^{o} – 90^{o} – 30^{o} = 60^{o}.

ΟΑ = ΟΓ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΟΓΑ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60^{o}, άρα είναι ισόπλευρο. Επομένως $\widehat{\Gamma}_1 = 60^{o}$ (1).

Στο τρίγωνο ΟΡΒ: $\widehat{\mathrm{O}}_2 + \mathrm{O\widehat{B}P} + \mathrm{O\widehat{P}B}$ = 180^{o}. Άρα $\widehat{\mathrm{O}}_2$= 180^{o} – 90^{o} – 30^{o} = 60^{o}.

ΟΒ = ΟΓ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΟΓΒ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60^o, άρα ισόπλευρο. Επομένως, $\hat{\Gamma}_2 = 60^o$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε ότι $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 60^o + 60^o = 120^o$.

γ) Στο β) ερώτημα αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα ΟΓΑ και ΟΓΒ είναι ισόπλευρα.

Επομένως, ΑΓ = ΟΑ = ΟΓ = ΓΒ = ΟΒ. Το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος γιατί έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.