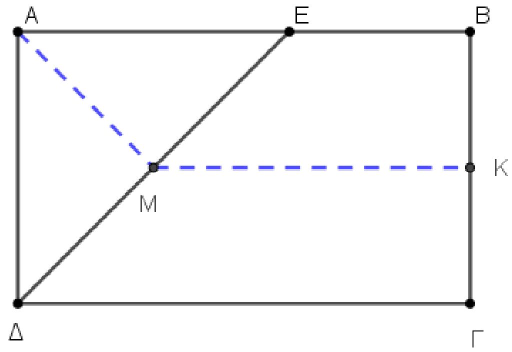
Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ > ΑΔ. Στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΕ. Από το μέσο Μ της ΔΕ φέρουμε παράλληλη προς την ΔΓ που τέμνει την ΒΓ στο Κ.



α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, γιατί ΑΔ = ΑΕ.

Επομένως, η διάμεσος ΑΜ που αντιστοιχεί στην βάση θα είναι και ύψος.

Άρα, ΑΜ $\perp$ ΔΕ.

β) Αν η ΔΕ ήταν παράλληλη στην ΒΓ, θα είχαμε από το Δ δύο παράλληλες, τις ΔΑ και ΔΕ προς την ΒΓ, που είναι άτοπο λόγω του 1^{ου} αιτήματος παραλληλίας. Επομένως, η ΔΕ δεν είναι παράλληλη προς την ΒΓ. Άρα, το ΕΒΓΔ είναι τραπέζιο γιατί ΕΒ//ΔΓ και η ΔΕ δεν είναι παράλληλη με την ΒΓ.

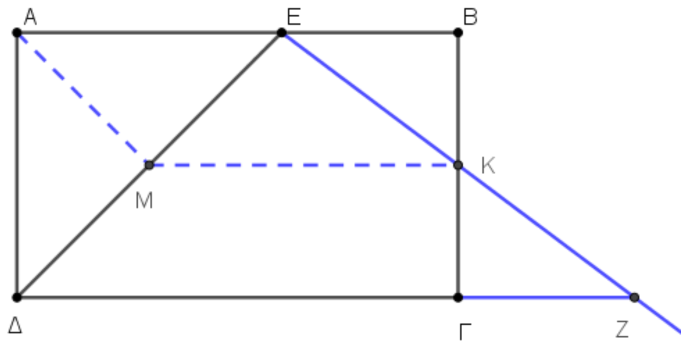
Από το μέσο Μ της ΔΕ φέραμε ΜΚ//ΔΓ, άρα το Κ είναι το μέσο πλευράς ΒΓ.

Η διάμεσος ΜΚ του τραπεζίου ΕΒΓΔ θα ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων, δηλαδή ΜΚ = $\frac{\Delta\Gamma + \mathrm{EB}}{2}$ ή 2ΜΚ = ΔΓ + ΕΒ (1).

Όμως ΔΓ=ΑΒ (2), ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και ΑΔ = ΑΕ (3), από υπόθεση. Επίσης, ΕΒ = ΑΒ-ΑΕ (4).

Από (1), (2), (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι 2ΜΚ = ΑΒ + ΑΒ – ΑΕ = 2ΑΒ – ΑΔ (5).

γ) Προεκτείνουμε την ΕΚ που τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Ζ.



Στο τρίγωνο ΔΕΖ το Μ είναι μέσο της ΔΕ και ΜΚ//ΔΖ, άρα η ΜΚ διέρχεται από το μέσο Κ της ΕΖ. Επομένως:

$\text{ΜΚ} = \dfrac{\text{ΔΖ}}{2} \Leftrightarrow 2\text{ΜΚ} = \text{ΔΖ} \Leftrightarrow$(από (5)) $2\text{ΑΒ} - \text{ΑΔ} = \text{ΔΓ} + \text{ΓΖ} \Leftrightarrow$

$2\text{ΑΒ}-\text{ΑΔ}=\text{ΑΒ}+\text{ΓΖ} \Leftrightarrow \text{ΓΖ} = \text{ΑΒ} - \text{ΑΔ}$.