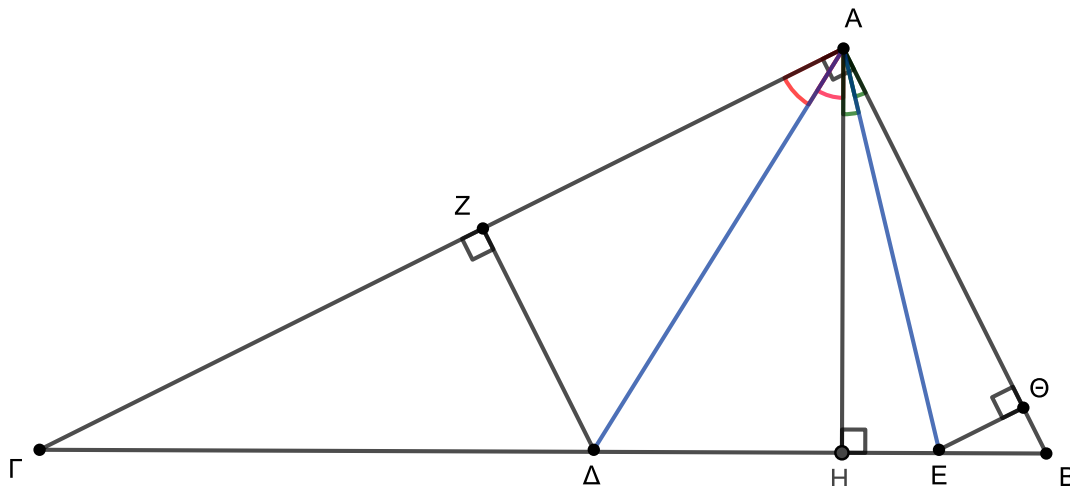


## ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A}=90^\circ$ ) με  $AB < A\Gamma$  και  $AH$  το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά  $B\Gamma$  θεωρούμε τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  τέτοια ώστε  $\Delta B = AB$  και  $\Gamma E = \Gamma A$ . Φέρουμε τις αποστάσεις  $DZ$  και  $E\Theta$  των  $\Delta$  και  $E$  από τις πλευρές  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα.



α) Από το σχήμα έχουμε ότι:  $\widehat{\Gamma\Delta A} = \widehat{\Gamma A B} - \widehat{\Delta A B} = 90^\circ - \widehat{\Delta A B}$  (1).

Οι γωνίες  $\widehat{\Delta A H}$  και  $\widehat{A A H}$  του ορθογώνιου τριγώνου  $A\Delta H$  είναι συμπληρωματικές, οπότε:  $\widehat{\Delta A H} = 90^\circ - \widehat{A A H}$  (2).

Αφού  $B\Delta = BA$ , το τρίγωνο  $B\Delta A$  θα είναι ισοσκελές με βάση  $\Delta A$ , οπότε οι γωνίες  $\widehat{\Delta A B}$  και  $\widehat{A A H}$  θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή  $\widehat{\Delta A B} = \widehat{A A H}$  (3).

Άρα, από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι  $\widehat{\Gamma\Delta A} = \widehat{\Delta A H}$  (4).

Έχουμε, επίσης, ότι:  $\widehat{E A B} = \widehat{\Gamma A B} - \widehat{\Gamma A E} = 90^\circ - \widehat{\Gamma A E}$  (5).

Οι γωνίες  $\widehat{H A E}$  και  $\widehat{A E H}$  του ορθογώνιου τριγώνου  $A E H$  είναι συμπληρωματικές, οπότε:  $\widehat{H A E} = 90^\circ - \widehat{A E H}$  (6).

Αφού  $\Gamma E = \Gamma A$ , το τρίγωνο  $\Gamma E A$  θα είναι ισοσκελές με βάση  $E A$ , οπότε οι γωνίες  $\widehat{\Gamma A E}$  και  $\widehat{A E H}$  θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή  $\widehat{\Gamma A E} = \widehat{A E H}$  (7).

Άρα, από τις σχέσεις (5), (6) και (7) προκύπτει ότι  $\widehat{E A B} = \widehat{H A E}$  (8).

β) Από (α) ερώτημα ισχύει ότι  $\widehat{E A B} = \widehat{H A E}$ , οπότε η  $A E$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{H A B}$  του τριγώνου  $A H B$ .

Άρα, το σημείο  $E$  ισαπέχει από τις πλευρές  $A H$  και  $A B$  κι επομένως είναι  $E H = E \Theta$ .

Από (α) ερώτημα ισχύει, επίσης, ότι  $\widehat{\Gamma\Delta A} = \widehat{\Delta A H}$ , οπότε η  $A \Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{H A \Gamma}$  του τριγώνου  $A H \Gamma$ .

Άρα, το σημείο Δ ισαπέχει από τις πλευρές ΑΗ και ΑΓ κι επομένως είναι  $\Delta Η = \Delta Ζ$ .

Συνεπώς,  $\Delta Ε = \Delta Η + ΕΗ = \Delta Ζ + ΕΘ$ .