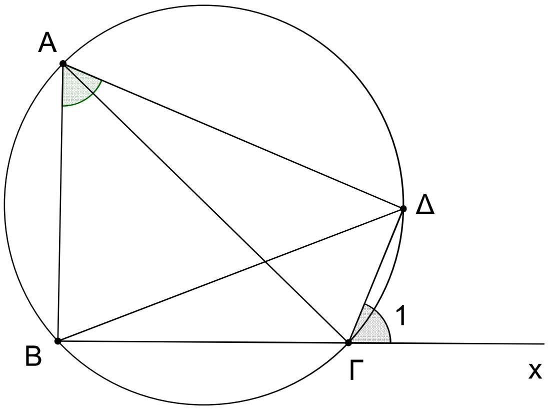
α) Η γωνία $\widehat{\Gamma}_1$ είναι εξωτερική του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, συνεπώς ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του, δηλαδή $\widehat{\Gamma}_1 = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta$ (1).

Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{x}$, άρα $\widehat{\Gamma}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{x}$ (2).

Από τις ισότητες (1), (2) προκύπτει ότι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = \frac{1}{2}\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{x}$ (3).



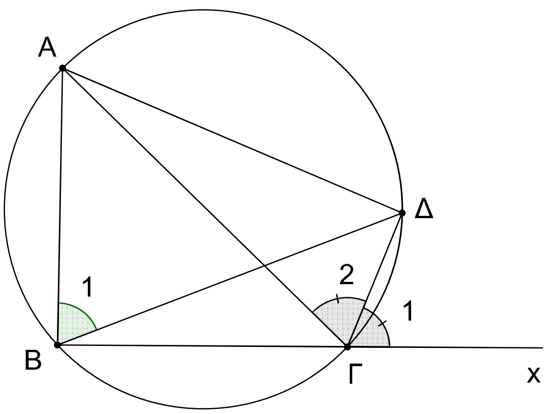
β) Είναι $\widehat{\mathrm{B}}_1 = \widehat{\Gamma}_2$ (4),

ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΔ.

Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{x}$, άρα $\widehat{\Gamma}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{x}$ (5).

Από τις σχέσεις (4), (5) προκύπτει ότι $\widehat{\mathrm{B}}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{x}$ (6).

Από τις σχέσεις (3), (6) προκύπτει ότι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = \widehat{\mathrm{B}}_1$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές αφού έχει δύο ίσες γωνίες. Ίσες πλευρές του τριγώνου είναι οι ΔΒ και ΔΑ, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες του $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\widehat{\mathrm{B}}_1$ αντίστοιχα.



γ) Αν η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, τότε το τόξο ΑΔΓ είναι ημικύκλιο, οπότε η γωνία $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$ είναι ορθή ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι συμπληρωματικές, δηλαδή

$\widehat{\Gamma}_3 + \widehat{\mathrm{A}}_1 = 90^{\mathrm{o}}$ (7).

Οι γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}_1, \widehat{\Delta}_1$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΓ, άρα $\widehat{\mathrm{A}}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (8).

Από τις ισότητες (7), (8) προκύπτει ότι $\widehat{\Gamma}_3 + \widehat{\Delta}_1 = 90^o$, άρα οι γωνίες $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$ και $\mathrm{B}\widehat{\Delta}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές.