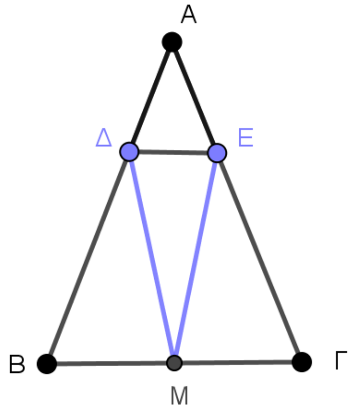
α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ το μέσο της πλευράς του ΒΓ.




i. Στην πλευρά ΑΔ θεωρούμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΔΒ = 2 ΑΔ. Το σημείο Δ χωρίζει την πλευρά ΑΒ σε δυο τμήματα, από τα οποία το ένα είναι διπλάσιο του άλλου. Συνεπώς το τμήμα ΑΔ είναι ίσο με $\frac{1}{3}$ της ΑΒ. Αντίστοιχα και στην πλευρά ΑΓ ισχύει ότι το ΑΕ είναι ίσο με $\frac{1}{3}$ της ΑΓ. Για τα τμήματα ΔΒ και ΕΓ ισχύει ότι ΔΒ = $\frac{2}{3}$ ΑΒ και ΕΓ $=\frac{2}{3}$ ΑΓ, και αφού ΑΒ = ΑΓ θα ισχύει και ότι ΔΒ = ΕΓ.

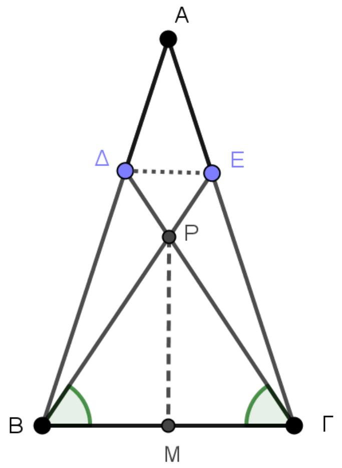
ii. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ. Έχουν:

- ΒΜ = ΜΓ αφού το Μ είναι μέσο της ΒΓ
- ΔΒ = ΕΓ όπως αποδείξαμε στο ερώτημα α)
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ επειδή είναι οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν τις δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα. Συνεπώς οι πλευρές τους ΜΔ και ΜΕ θα είναι ίσες αφού είναι οι τρίτες πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$.

Στο τρίγωνο ΜΔΕ οι δυο πλευρές του είναι ίσες , οπότε αυτό είναι ισοσκελές.

β) Φέρω τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ  και έστω Ρ το σημείο τομής τους.




i. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΓΒΕ και ΒΓΔ. Έχουν:

- ΕΓ = ΔΒ από το ερώτημα α)
- ΒΓ κοινή πλευρά
- $E\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{B}\Gamma$ ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε οι γωνίες $\Gamma\hat{B}E$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΓ και ΔΒ, είναι ίσες.

ii. Στο τρίγωνο ΡΒΓ οι δύο γωνίες του $\Gamma\hat{B}P$ και $B\hat{\Gamma}P$ είναι ίσες, από το προηγούμενο ερώτημα, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ. Το ΡΜ είναι διάμεσος προς τη βάση  του ισοσκελούς τριγώνου ΡΒΓ οπότε είναι και διχοτόμος της γωνίας $B\hat{P}\Gamma$.