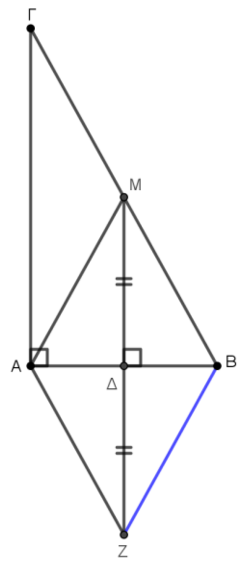
Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}$=90°) και Μ το μέσο της υποτείνουσάς του ΒΓ. Φέρουμε ΜΔ⊥ΑΒ και έστω ΔΖ=ΜΔ.

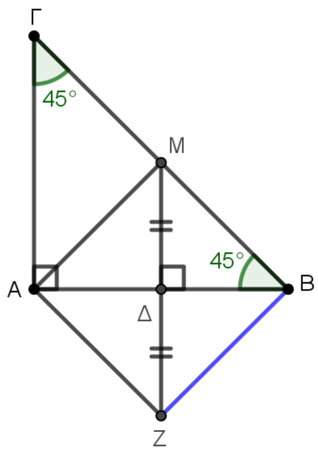


α)

i. Στο τρίγωνο ΜΒΖ επειδή ΜΔ=ΔΖ το τμήμα ΒΔ είναι διάμεσος της πλευράς ΜΖ και επιπλέον ΜΖ⊥ΑΒ από υπόθεση, άρα το τμήμα ΒΔ είναι και ύψος του. Επομένως το τρίγωνο ΜΒΖ είναι ισοσκελές.

ii. ΜΔ⊥ΑΒ (1) από υπόθεση και ΑΓ⊥ΑΒ αφού $\widehat{A}$=90°, άρα ΜΔ//ΑΓ ως κάθετες στο ίδιο τμήμα ΑΒ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ από το μέσο Μ της ΒΓ έχουμε ΜΔ//ΑΓ, άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ. Στο τετράπλευρο ΑΜΒΖ οι διαγώνιές του διχοτομούνται αφού ισχύει επιπλέον ότι το Δ είναι μέσο και του τμήματος ΜΖ από κατασκευή. Άρα το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο και επειδή οι διαγώνιές του ΜΖ και ΑΒ είναι και κάθετες, τελικά το ΑΜΒΖ είναι ρόμβος.

β)



Αν το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές, τότε $\widehat{\mathrm{B}}$=$\widehat{\Gamma}$=45° (άθροισμα ίσων οξειών γωνιών ορθογωνίου τριγώνου). Στο ρόμβο ΑΜΒΖ γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του, άρα οι γωνίες $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{M}$=$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z}$=45° . Οπότε $\mathrm{M}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z}$=90° και ο ρόμβος ΑΜΒΖ έχει μία ορθή γωνία οπότε είναι και ορθογώνιο, άρα τελικά το ΑΜΒΖ είναι τετράγωνο.